

O caráter de Chern-Connes para
C*-sistemas dinâmicos calculado
em algumas álgebras de
operadores pseudodiferenciais

David Pires Dias

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Área de Concentração: **Matemática**

Orientador: **Prof. Dr. Severino Toscano do Rego Melo**

- São Paulo, abril de 2008. -

**O caráter de Chern-Connes para
C*-sistemas dinâmicos calculado
em algumas álgebras de
operadores pseudodiferenciais**

Este exemplar corresponde à redação
final da tese devidamente corrigida
e defendida por David Pires Dias e
aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 11 de abril de 2008.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Severino Toscano do Rego Melo (Presidente) - IME-USP
- Prof. Dr. Ricardo Bianconi - IME-USP
- Prof. Dr. Carlos Eduardo Duran Fernandez - UNICAMP
- Prof. Dr. Antônio Roberto da Silva - UFRJ
- Prof. Dr. Fernando Raul Abadie Vicens - UR

*Aos meus pais,
Carlos e Maria Helena.*

Resumo

Dado um C^* -sistema dinâmico (A, G, α) define-se um homomorfismo, denominado de caráter de Chern-Connes, que leva elementos de $K_0(A) \oplus K_1(A)$, grupos de K-teoria da C^* -álgebra A , em $H_{\mathbb{R}}^*(G)$, anel da cohomologia real de deRham do grupo de Lie G . Utilizando essa definição, nós calculamos explicitamente esse homomorfismo para os exemplos $(\overline{\Psi_{cl}^0(S^1)}, S^1, \alpha)$ e $(\overline{\Psi_{cl}^0(S^2)}, SO(3), \alpha)$, onde $\overline{\Psi_{cl}^0(M)}$ denota a C^* -álgebra gerada pelos operadores pseudodiferenciais clássicos de ordem zero da variedade M e α a ação de conjugação pela representação regular (translações).

Abstract

Given a C*-dynamical system (A, G, α) one defines a homomorphism, called the Chern-Connes character, that take an element in $K_0(A) \oplus K_1(A)$, the K-theory groups of the C*-algebra A , and maps it into $H_{\mathbb{R}}^*(G)$, the real deRham cohomology ring of G . We explicitly compute this homomorphism for the examples $(\overline{\Psi_{cl}^0(S^1)}, S^1, \alpha)$ and $(\overline{\Psi_{cl}^0(S^2)}, SO(3), \alpha)$, where $\overline{\Psi_{cl}^0(M)}$ denotes the C*-álgebra generated by the classical pseudodifferential operators of zero order in the manifold M and α the action of conjugation by the regular representation (translations).

Índice

Introdução	1
Notações e convenções	5
1 O caráter de Chern-Connes para C^*-sistemas dinâmicos	7
1.1 O Caráter de Chern-Connes	8
1.2 A extensão para $K_1(A)$: o caso ímpar	22
2 O caráter de Chern-Connes de $\overline{\Psi_{cl}^0(S^1)}$	25
3 O caráter de Chern-Connes de $\overline{\Psi_{cl}^0(S^2)}$	35
3.1 A K-teoria do fibrado das esferas da esfera	36
3.2 O caráter de Chern - Connes	41
4 A K-teoria do fibrado das coesferas do Toro	45
Apêndices	49
A Representações em álgebras de Lie	49
B Resultados sobre K-teoria de C^*-álgebras	55

Introdução

O propósito deste trabalho foi, desde o princípio, o de compreender o caráter de Chern-Connes, apresentado pela primeira vez por Alain Connes em [C1], e posteriormente calculá-lo na C^* -álgebra gerada pelos operadores pseudodiferenciais clássicos de ordem zero da esfera, que designamos por $\overline{\Psi_{cl}^0(S^2)}$.

Por esse motivo o primeiro capítulo trata da construção (definição) do homomorfismo de Chern-Connes para um C^* -sistema dinâmico (A, G, α) , onde A é uma C^* -álgebra, G é um grupo de Lie e α é um homomorfismo contínuo de G no grupo dos automorfismos de A , designado por $Aut(A)$, equipado com a topologia da convergência pontual.

Grande parte das idéias desse capítulo baseiam-se em [C1] que é um artigo extremamente conciso. Por esse motivo se fez necessário detalhar muitas das passagens omitidas nesse artigo e para tal foi necessário recorrer a idéias de outros textos que não aparecem exatamente no mesmo contexto em que estamos trabalhando. Vale destacar alguns desses textos como [C3] do mesmo autor, [L] mais voltado à parte algébrica, [K] e [F] dentre outros. Além desses textos, alguns dos resultados que provamos neste primeiro capítulo foram demonstrados graças a conversas com colegas como Johannes Aastrup, Ricardo Bianconi e Bertrand Monthubert.

O segundo capítulo nasceu da necessidade de se trabalhar um pouco com a definição dada no primeiro capítulo para casos mais simples do que o já mencionado no primeiro parágrafo. Por este motivo o capítulo em questão apresenta o cálculo explícito do caráter de Chern-Connes para o C^* -sistema dinâmico em que a C^* -álgebra é $\overline{\Psi_{cl}^0(S^1)}$, isto é, a C^* -álgebra gerada pelos operadores pseudodiferenciais clássicos de ordem zero da variedade S^1 .

A beleza do segundo capítulo está no fato de se ver inteiramente a construção do caráter de Chern-Connes, feita no capítulo anterior, sendo aplicada num caso concreto. Destacam-se aqui vários fatos como o de $\Psi_{cl}^0(S^1)$ ser invariante pelo cálculo funcional holomorfo o que faz com que este exemplo se encaixe perfeitamente à definição utilizada; a possibilidade de mostrar de forma simples que a aplicação do índice δ_1 é sobrejetora, pois neste caso apresentamos de forma clara o operador que é levado no gerador do contra-domínio; e também o fato do traço neste caso ser uma combinação linear *real* de duas integrais para que as hipóteses sejam todas satisfeitas. Mas talvez o fato que mereça maior atenção seja o de que pudemos provar, utilizando os isomorfismos de K-teoria e também o auxílio computacional¹, o *caso particular* (a) enunciado por A. Connes em [C1].

O terceiro capítulo apresenta o cálculo do caráter de Chern-Connes para a C^* -álgebra gerada pelos operadores pseudodiferenciais clássicos de ordem zero da esfera, denotada por $\overline{\Psi_{cl}^0(S^2)}$, que foi nosso objetivo desde o princípio do trabalho. Apresentamos na primeira parte desse capítulo os grupos de K-teoria de $C(SS^2)$, onde $SS^2 \subset TS^2$ denota o sub-fibrado das esferas unitárias do fibrado tangente de S^2 que denominamos fibrado das esferas de S^2 , e estes foram obtidos utilizando-se Mayer-Vietoris para K-teoria de C^* -álgebras, ferramenta esta apresentada como em [MS1], mas que também aparece de forma mais geral em [B]. Cabe ressaltar que os resultados aqui obtidos, isto é, que $K_1(C(SS^2)) = \mathbb{Z}$ e que $K_0(C(SS^2)) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$, coincidiram com os resultados ainda não publicados por F. Rochon em [Ro], mas vale dizer que nossos resultados foram encontrados através de ferramentas diferentes das utilizadas em [Ro].

Já na segunda seção deste terceiro capítulo, utilizando os resultados obtidos na seção anterior, calculamos os grupos de K-teoria de $\overline{\Psi_{cl}^0(S^2)}$. E de posse dos grupos de K-teoria da C^* -álgebra $\overline{\Psi_{cl}^0(S^2)}$ pudemos chegar ao nosso objetivo principal e apresentar o caráter de Chern-Connes, como desejado desde o início.

O quarto capítulo apresenta o cálculo da K-teoria do fibrado das coesferas do toro, pois planejo, em seguida, utilizar estes grupos para calcular o caráter de Chern-Connes em $\overline{\Psi_{cl}^0(T)}$, ou seja, a C^* -álgebra gerada pelo operadores pseudodiferenciais clássicos de ordem zero do Toro. Mas para resolver este problema, em que pretendo

¹Para os cálculos em questão foi utilizado o "software" Maple 6.

continuar trabalhando, talvez seja necessário pensar em alguns outros, como por exemplo, uma fórmula mais geral para o caráter de Chern-Connes quando calculado em K_1 , assim como fizeram Charlotte Wahl em [Wa] e também Ezra Getzler em [G] para outras generalizações do caráter de Chern-Connes. Observe que tal fórmula não foi necessária nos dois exemplos que demos anteriormente, já que no primeiro, isto é, em $\overline{\Psi_{cl}^0(S^1)}$, devido a dimensão do grupo de Lie S^1 , precisamos apenas da fórmula para o primeiro termo ímpar do somatório e no segundo exemplo (em $\overline{\Psi_{cl}^0(S^2)}$) não se fez necessária, pois $K_1(\overline{\Psi_{cl}^0(S^2)}) = 0$.

Vale lembrar que em todos os exemplos citados a C^* -álgebra em questão, isto é, a C^* -álgebra gerada pelos operadores pseudodiferenciais clássicos de ordem zero das variedades S^1 , S^2 e T contém a álgebra dos operadores compactos \mathcal{K} e seus comutadores são compactos. Utilizando-se este fato e os resultados de "comparison algebras" de H. Cordes [Co], que na verdade já eram conhecidos por Konh e Nirenberg [KN] e também por Gohberg [Go] e Seeley [S], temos o quociente da álgebra por \mathcal{K} comutativo o que faz com que nossos exemplos não fiquem muito longe do caso clássico comutativo. Pretendemos trabalhar no cálculo explícito do homomorfismo de Chern-Connes para algumas álgebras geradas por operadores pseudodiferenciais que não possuem esta propriedade, vide por exemplo a álgebra estudada em [MS].

Além desses capítulos esta tese apresenta logo a seguir uma lista de convenções e notações iniciais. E na tentativa de auxiliar àqueles menos familiarizados com K-teoria e/ou com alguns resultados sobre grupos de Lie, esta tese também dispõe de dois apêndices. O primeiro versando sobre alguns resultados, necessários para a compreensão do caráter de Chern-Connes no contexto de C^* -sistemas dinâmicos, sobre representações em grupos de Lie. Cabe aqui agradecer a Daniel V. Tausk por sua inestimável cooperação e esclarecimentos sobre diversos tópicos desse apêndice. Existe ainda um segundo apêndice sobre K-teoria, ferramenta essencial para o entendimento e os cálculos do homomorfismo de Chern-Connes tema central deste trabalho.

Notações e convenções

- $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, $T = S^1 \times S^1$ e $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.
- M_a é o operador de multiplicação por $a \in C^\infty(S^1)$ e $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ o conjunto dos operadores limitados de \mathcal{H} como em B.2.
- F_d designa a transformada de Fourier discreta, isto é, $F_d : L^2(S^1) \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$, onde $(F_d u)_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{u}(\theta) e^{-ij\theta} d\theta$, $j \in \mathbb{Z}$ e $\tilde{u}(\theta) = u(e^{i\theta})$.
- S^*M denotará o fibrado das coesferas de uma variedade riemanniana M de dimensão n , isto é, o conjunto de todos os pontos $(x, \xi) \in T^*M$, fibrado cotangente de M , tais que $\sum_{i,j=1}^n m_{ij}(x) \xi_i \xi_j = 1$, onde m é a métrica riemanniana.
- $CS(\mathbb{Z}) = \{(a_i)_{i \in \mathbb{Z}} : \lim_{i \rightarrow \infty} a_i = a(\infty) \text{ e } \lim_{i \rightarrow -\infty} a_i = a(-\infty) \text{ existem}\}$.
- $a(D_\theta) = F_d^{-1} M_a F_d$, onde M_a é o operador de multiplicação pela seqüência $(a_i) \in CS(\mathbb{Z})$.
- Os símbolos $\mathbf{1}$, \mathbf{o} e \mathbf{z} serão utilizados para designar, respectivamente, as aplicações $\mathbf{1}(z) = 1$, $\mathbf{o}(z) = 0$ e $\mathbf{z}(z) = z$, $z \in S^1$, como pode ser visto em B.18 e B.24.
- O conjunto SA é a suspensão da C^* -álgebra A , isto é,

$$\begin{aligned} SA &= \{f \in C([0, 1], A) : f(0) = f(1) = 0\} \\ &= \{f \in C([0, 2\pi], A) : f(0) = f(2\pi) = 0\} \\ &= \{f \in C(S^1, A) : f(1) = 0\} = C_0([0, 1[, A) \end{aligned}$$

como em B.20.

- Sendo A uma C^* -álgebra as aplicações θ_A e β_A são os isomorfismos da K-teoria complexa dados por $\theta_A : K_1(A) \rightarrow K_0(SA)$ e $\beta_A : K_0(A) \rightarrow K_1(SA)$ respectivamente, para maiores detalhes vide B.21 e B.22.

Capítulo 1

O caráter de Chern-Connes para C^* -sistemas dinâmicos

O objetivo deste capítulo é o de apresentar com mais detalhes a definição do caráter de Chern dada por Alain Connes em [C1]. Nesse artigo Connes generaliza a idéia de caráter de Chern, já consagrada em geometria diferencial.

Na geometria diferencial o caráter de Chern nada mais é do que um morfismo que relaciona elementos de um K -grupo a elementos de um grupo de cohomologia (de deRham). Acontece porém, que tal caráter nasceu naturalmente para cálculos em que os K -grupos provinham de Álgebras de Banach comutativas e Alain Connes estendeu estes resultados e cálculos, já clássicos para o caso comutativo, para C^* -sistemas dinâmicos (caso este em que existe uma ação de grupo envolvida e que estudaremos neste capítulo) e também para álgebras de Banach não-comutativas utilizando teorias mais sofisticadas como a da cohomologia cíclica, cíclica periódica, etc. (casos estes que podem ser encontrados em [C3] e [L]).

Vale lembrar que a definição mais usual do caráter de Chern da geometria diferencial é dada através do cálculo do traço da exponencial de uma curvatura do fibrado vetorial de uma variedade diferenciável e que tal traço é um elemento do grupo de cohomologia de deRham desta variedade. O que apresentaremos a seguir é um detalhamento da definição do caráter de Chern para C^* -sistemas dinâmicos e isto será feito de maneira análoga a definição mais usual deste homomorfismo.

Como já dito a apresentação a seguir é baseada na extensão do caráter de Chern introduzida por Alain Connes em [C1] e por este motivo passaremos a denominar tal homomorfismo por caráter de Chern-Connes.

1.1 O Caráter de Chern-Connes

Apresentaremos nesta seção a definição do caráter de Chern-Connes introduzido por Alain Connes em seu artigo [C1] preenchendo também alguns detalhes omitidos pelo autor no referido artigo.

Seja (A, G, α) um C^* -sistema dinâmico, isto é, A é uma C^* -álgebra unital, G um grupo de Lie e $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(A)$ uma ação contínua na topologia forte de operadores, isto é, para todo $a \in A$ a aplicação $\alpha(a) : g \mapsto \alpha_g(a)$ é contínua na norma.

Diremos que $a \in A$ é de classe C^k ($1 \leq k \leq \infty$) se, e somente se, a aplicação $\alpha(a)$ é de classe C^k . A álgebra involutiva $A^\infty = \{a \in A : a \text{ é de classe } C^\infty\}$ é densa (na norma) em A . Este resultado é conhecido como Teorema de Gårding e sua demonstração pode ser encontrada em A.1.

Cabe observar que A^∞ possui uma estrutura de $*$ -álgebra de Fréchet induzida pela aplicação $\alpha : A^\infty \rightarrow C^\infty(G, A)$, dada por $a \mapsto \alpha(a)$. Esta topologia, induzida pelas seminormas canônicas de $C^\infty(G, A)$, torna a inclusão $A^\infty \hookrightarrow A$ contínua. De fato, como α é um automorfismo, temos

$$\|\alpha(a_i)\|_\infty = \sup_{g \in G} \|\alpha_g(a_i)\| = \|a_i\|.$$

Além disso, se $a \in A^\infty \subset A$ é invertível em A , então $a^{-1} \in A^\infty$, isto porque $\alpha_g(a^{-1}) = \alpha_g(a)^{-1}$. Assim o conjunto dos invertíveis de A^∞ é aberto e portanto a inversão é contínua, vide o corolário da página 115 de [W].

Como a operação de inversão é contínua, então as integrais de Cauchy que nos dão o cálculo funcional holomorfo convergem em A^∞ , em outras palavras, A^∞ é invariante pelo cálculo funcional holomorfo e portanto a inclusão de A^∞ em A induz os isomorfismos $K_0(A^\infty) \simeq K_0(A)$ e $K_1(A^\infty) \simeq K_1(A)$. Este é um resultado bastante conhecido de K-teoria, que afirma que dadas uma C^* -álgebra A e uma

subálgebra A^∞ densa em A e invariante pelo cálculo funcional holomorfo, então $K_i(A^\infty) \simeq K_i(A)$, para $i = 0$ ou 1 . A demonstração deste fato pode ser vista com mais detalhes no apêndice 3 de [C2] ou também como enunciado nas seções 5 e 8 de [B].

Nossa intenção nesta seção é a de definir o caráter de Chern-Connes que, como veremos a seguir, é um homomorfismo entre os grupos de K-teoria de uma C^* -álgebra e os de cohomologia de um grupo de Lie. Podemos então, utilizando os isomorfismos vistos no parágrafo anterior, isto é, $K_0(A^\infty) \simeq K_0(A)$ e $K_1(A^\infty) \simeq K_1(A)$, fazer a opção de utilizar um m.p.f.g.¹ M^∞ sobre A^∞ , ao invés de M um m.p.f.g. sobre A . Tal opção não trará diferença à definição do caráter de Chern-Connes, no entanto, nos permitirá derivar os elementos da álgebra, já que estes estarão sempre em A^∞ .

Como todo m.p.f.g é um somando direto de um módulo livre com base finita, vide proposição 3.10 de [J] e seu corolário, podemos então afirmar que existe um idempotente² $e \in M_n(A^\infty)$, para algum $n \in \mathbb{N}$, tal que $e((A^\infty)^n)$ e M^∞ são isomorfos. Por 4.6.2 de [B] sabemos que dentre os idempotentes desta mesma classe podemos tomar um que satisfaça as condições

$$e^2 = e \quad e \quad e^* = e.$$

Ou seja, e é uma projecção que passaremos a designar por $p \in M_n(A)$.

Definição 1.1 Definimos δ uma representação da álgebra de Lie do grupo G , designada por \mathfrak{g} , na álgebra de Lie das derivações de A^∞ , dada por

$$\delta_X(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha_{g_t}(a) - a}{t}, \quad \text{onde } g'_0 = X \quad e \quad a \in A^\infty.$$

A demonstração de que δ é de fato uma representação, isto é, de que a definição anterior faz sentido, pode ser vista em A.4.

Algumas vezes, ao invés de nos depararmos com $a \in A$ ($a \in A^\infty$), teremos $a \in M_n(A)$ ($a \in M_n(A^\infty)$) e a extensão da definição das aplicações α_g (δ_X) de A (A^∞), para $M_n(A)$ ($M_n(A^\infty)$) é feita pontualmente, ou melhor, em cada

¹módulo à direita, exceto quando mencionado o contrário, projetivo e finitamente gerado

²mais precisamente uma família de idempotentes.

entrada da matriz, isto é, para $a = (a_{ij}) \in M_n(A)$, temos $\alpha_g(a) = (\alpha_g(a_{ij}))$ (para $a = (a_{ij}) \in M_n(A^\infty)$, temos $\delta_X(a) = (\delta_X(a_{ij}))$).

Com o que foi apresentado até o momento, nos encontramos aptos a definir o que é uma conexão ∇ sobre o m.p.f.g. M^∞ .

Definição 1.2 *Dado o m.p.f.g. M^∞ sobre A^∞ uma conexão sobre M^∞ é uma aplicação linear $\nabla : M^\infty \rightarrow M^\infty \otimes \mathfrak{g}^*$, que satisfaz*

$$\nabla_X(\xi a) = \nabla_X(\xi)a + \xi\delta_X(a) , \quad \forall \xi \in M^\infty, \quad \forall X \in \mathfrak{g} \quad e \quad \forall a \in A^\infty.$$

Para todo $M^\infty \simeq p((A^\infty)^n)$ m.p.f.g. sobre A^∞ , com p como acima, existe uma conexão chamada de conexão grassmaniana ou de Levi-Civita (em analogia à definição usual da conexão de Levi-Civita da geometria diferencial). Tal conexão é dada por:

$$\nabla_X^0(\xi) = p\delta_X(\xi) \in M^\infty, \quad \forall \xi \in M^\infty \text{ e } X \in \mathfrak{g}.$$

De fato, a linearidade de ∇_X^0 decorre da linearidade de δ_X . Através do isomorfismo $p((A^\infty)^n) \simeq M^\infty$ e da igualdade $p^2 = p$, dados $X \in \mathfrak{g}$, $a \in A^\infty$ e $\xi \in M^\infty$, temos

$$\nabla_X^0(\xi a) = p\delta_X(\xi a) = p\delta_X(\xi)a + p\xi\delta_X(a) = \nabla_X^0(\xi)a + \xi\delta_X(a),$$

ou seja, ∇^0 é conexão.

Através da representação δ temos o complexo $\Omega = A^\infty \otimes \Lambda\mathfrak{g}^*$ das formas diferenciáveis invariantes à esquerda sobre o grupo G com coeficientes em A^∞ . Assim munimos Ω com uma estrutura de álgebra ³, dada pelo produto tensorial de A^∞ com a álgebra exterior $\Lambda\mathfrak{g}^*$, cuja derivação exterior d satisfaz:

- $\delta_X(a) = da(X)$, $\forall a \in A^\infty$ e $X \in \mathfrak{g}$;
- $d(w_1 \wedge w_2) = d(w_1) \wedge w_2 + (-1)^k w_1 \wedge d(w_2)$, $\forall w_1 \in \Omega^k$ e $w_2 \in \Omega$ e

³Observe que esta estrutura não é necessariamente comutativa, isto porque

$$w_1 \wedge w_2 \neq (-1)^{gr(w_1)gr(w_2)} w_2 \wedge w_1.$$

- $d^2(w) = 0, \forall w \in \Omega$.

Note que $A^\infty \simeq A^\infty \otimes 1 \subset \Omega$ e portanto Ω pode ser visto como um bimódulo sobre A^∞ .

Além disso, podemos identificar $End(M^\infty) \simeq End(p(A^\infty)^n)$ com $pM_n(A^\infty)p$. Para isto basta tomar o isomorfismo

$$\begin{aligned} \phi : End(M^\infty) &\rightarrow pM_n(A^\infty)p \\ f &\mapsto pf(p)p. \end{aligned}$$

Lema 1.3 *Toda conexão ∇ sobre M^∞ é da forma*

$$\nabla_X(\xi) = \nabla_X^0(\xi) + \Gamma_X(\xi), \quad \forall \xi \in p((A^\infty)^n) \quad e \quad X \in \mathfrak{g},$$

com $\Gamma \in pM_n(\Omega^1)p$ unicamente determinada por ∇ .

Demonstração: Observe que $\gamma = \nabla - \nabla^0$ é A^∞ -linear, isto é, $\gamma_X(\xi a) = \gamma_X(\xi)a$, para todo $X \in \mathfrak{g}$, $\xi \in M^\infty$ e $a \in A^\infty$.

Utilizando o isomorfismo $\phi : End(M^\infty) \rightarrow pM_n(A^\infty)p$ podemos notar que existe $\Gamma_X \in M_n(A^\infty)$ tal que $\gamma_X(\xi) = p\Gamma_X p\xi$, $\forall \xi \in M^\infty$ e além disso, a aplicação $X \mapsto \Gamma_X$ é linear, isto é, $\Gamma \in pM_n(\Omega^1)p$.

■

Definição 1.4 *Seja ∇ uma conexão sobre o m.p.f.g. M^∞ , definimos a curvatura associada a ∇ como sendo o elemento $\Theta \in End_{A^\infty}(M^\infty) \otimes \Lambda^2 \mathfrak{g}^*$ dado por*

$$\Theta(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Observação 1.5 *Note que as curvaturas assim definidas são 2-formas e utilizando a identificação $End(M^\infty)$ com $pM_n(A^\infty)p \subset M_n(A^\infty)$ podemos mostrar que a curvatura associada a conexão grassmannianna ∇^0 é a 2-forma $\Theta_0 = pdp \wedge dp \in \Omega^2$.*

Vejamos

$$\begin{aligned} \Theta_0(X, Y) &= p(\Theta_0(X, Y)(p))p = p(\nabla_X^0 \nabla_Y^0(p) - \nabla_Y^0 \nabla_X^0(p) - \nabla_{[X, Y]}^0(p))p \\ &= p(p\delta_X(p\delta_Y(p)) - p\delta_Y(p\delta_X(p)) - p\delta_{[X, Y]}(p))p \end{aligned}$$

e utilizando-se o fato de que δ é uma representação de álgebras de Lie, como provado em A.4, temos

$$\begin{aligned}\Theta_0(X, Y) &= p(\delta_X(p)\delta_Y(p) + \delta_X\delta_Y(p) - \delta_Y(p)\delta_X(p) - \delta_Y\delta_X(p) - \delta_X\delta_Y(p) + \delta_Y\delta_X(p)) \\ &= p(\delta_X(p)\delta_Y(p) - \delta_Y(p)\delta_X(p)) = pdp \wedge dp(X, Y).\end{aligned}$$

Proposição 1.6 *Com a notação do Lema 1.3 podemos mostrar que a curvatura associada a conexão $\nabla = \nabla^0 + \Gamma$ é dada por*

$$\Theta = \Theta_0 + p(d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma)p.$$

Demonstração: Seja $\nabla = \nabla^0 + \Gamma$ uma conexão como no Lema 1.3. Utilizando-se formas tensorizadas podemos provar, de forma análoga a feita nos itens (a) e (f) da proposição 2.25 de [War], que

$$d\Gamma(X, Y) = \delta_X\Gamma_Y - \delta_Y\Gamma_X - \Gamma_{[X, Y]},$$

para quaisquer X e Y em \mathfrak{g} .

$$\text{Além disso, } (\Gamma \wedge \Gamma)(X, Y) = \Gamma_X\Gamma_Y - \Gamma_Y\Gamma_X.$$

Assim ao trocarmos ∇ por $\nabla^0 + \Gamma$ na definição de curvatura temos para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned}\Theta(X, Y) &= \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X, Y]} \\ &= (\nabla_X^0 + \Gamma_X)(\nabla_Y^0 + \Gamma_Y) - (\nabla_Y^0 + \Gamma_Y)(\nabla_X^0 + \Gamma_X) - (\nabla_{[X, Y]}^0 + \Gamma_{[X, Y]}) \\ &= \nabla_X^0\nabla_Y^0 + \nabla_X^0\Gamma_Y + \Gamma_X\nabla_Y^0 + \Gamma_X\Gamma_Y - \nabla_Y^0\nabla_X^0 - \nabla_Y^0\Gamma_X + \\ &\quad - \Gamma_Y\nabla_X^0 - \Gamma_Y\Gamma_X - \nabla_{[X, Y]}^0 - \Gamma_{[X, Y]}\end{aligned}$$

Utilizando as definições da conexão de Levi-Civita $\nabla_X^0 = p\delta_X$ e também da curvatura associada a esta, isto é, $\Theta_0(X, Y) = \nabla_X^0\nabla_Y^0 - \nabla_Y^0\nabla_X^0 - \nabla_{[X, Y]}^0$, temos

$$\begin{aligned}\Theta(X, Y) &= \Theta_0(X, Y) + p\delta_X(\Gamma_Y) - p\delta_Y(\Gamma_X) + \Gamma_Xp\delta_Y - \Gamma_Yp\delta_X + \\ &\quad + \Gamma_X\Gamma_Y - \Gamma_Y\Gamma_X - \Gamma_{[X, Y]} \\ &= \Theta_0(X, Y) + p\delta_X\Gamma_Y + p\Gamma_Y\delta_X - p\delta_Y\Gamma_X - p\Gamma_X\delta_Y + \Gamma_Xp\delta_Y + \Gamma_Xp\delta_Y + \\ &\quad - \Gamma_{[X, Y]} + \Gamma_X\Gamma_Y - \Gamma_Y\Gamma_X\end{aligned}$$

Lembrando que $\Gamma \in pM_n(\Omega^1)p$ e portanto $p\Gamma_X\delta_Y = \Gamma_X p\delta_Y$ e $p\Gamma_Y\delta_X = \Gamma_Y p\delta_X$, temos

$$\begin{aligned}\Theta(X, Y) &= \Theta_0(X, Y) + p(\delta_X\Gamma_Y - \delta_Y\Gamma_X - \Gamma_{[X, Y]}) + p(\Gamma_X\Gamma_Y - \Gamma_Y\Gamma_X) \\ &= \Theta_0(X, Y) + p(d\Gamma)p(X, Y) + p(\Gamma \wedge \Gamma)p(X, Y).\end{aligned}$$

Ou seja, podemos descrever qualquer curvatura Θ por

$$\Theta = \Theta_0 + p(d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma)p.$$

■

Utilizando agora o fato de $p \in M_n(A^\infty)$ ser projeção, ou mais precisamente $p^2 = p$, podemos provar algumas identidades que nos serão úteis no decorrer desta seção.

Lema 1.7 *Seja $p \in M_n(A^\infty)$ uma projeção e d a derivação exterior, então:*

1. $pdpp = 0$;
2. $pdp \wedge dp = p(dp \wedge dp)p = (dp \wedge dp)p$;
3. $(2p - 1)dp = -dp(2p - 1)$.
4. $(pdp \wedge dp)^k = p(dp \wedge dp)^k, \forall k \in \mathbb{N}$;
5. $d(pdp \wedge dp) = dp \wedge (pdp \wedge dp) + (pdp \wedge dp) \wedge dp$.

Demonstração: (1) Como $p^2 = p$, então $d(p^2) = dp$ e pela regra de Leibniz $dpp + pdp = dp$, multiplicando-se por p ambos os lados da igualdade e utilizando novamente que $p^2 = p$, temos $pdpp = 0$.

(2) Segue disto que $d(pdpp) = 0$, logo $dp \wedge dpp + pd^2pp - pdp \wedge dp = 0$ e como $d^2 = 0$, temos $dp \wedge dpp = pdp \wedge dp$. Utilizando o raciocínio anterior temos $pdp \wedge dp = p(dp \wedge dp)p = (dp \wedge dp)p$.

(3) Pela demonstração de (1) podemos observar que

$$\begin{aligned}(2p - 1)dp &= 2pdp - dp = pdp + (pdp - dp) = pdp - dpp \\ &= (dp - dpp) - dpp = -2dpp + dp = -dp(2p - 1).\end{aligned}$$

(4) Por (2) vemos que p comuta com $dp \wedge dp$ logo

$$(pdp \wedge dp)^k = p^k(dp \wedge dp)^k = p(dp \wedge dp)^k.$$

(5) Novamente por (2) temos $pdp \wedge dp = pdp \wedge dpp$, logo

$$\begin{aligned} d(pdp \wedge dp) &= d(pdp \wedge dpp) = dp \wedge dp \wedge dpp + pdp \wedge dp \wedge dp \\ &= dp \wedge (pdp \wedge dp) + (pdp \wedge dp) \wedge dp. \end{aligned}$$

■

A segunda afirmação deste lema também nos diz que $\Theta_0 = p\Theta_0 = \Theta_0p = p\Theta_0p$ e a quinta que $d(\Theta_0) = dp \wedge \Theta_0 + \Theta_0 \wedge dp$. Assim

$$\begin{aligned} d(\Theta_0) &= d(p\Theta_0p) = dp \wedge \Theta_0p + pd(\Theta_0)p + p\Theta_0 \wedge dp \\ &= dp \wedge \Theta_0 + \Theta_0 \wedge dp + pd(\Theta_0)p \\ &= d(\Theta_0) + pd(\Theta_0)p, \end{aligned}$$

ou seja, $pd(\Theta_0)p = 0$.

Definição 1.8 Uma aplicação $\tau : A \rightarrow \mathbb{C}$ é dita um traço finito G -invariante se para quaisquer elementos a e b de A e $g \in G$, temos

1. τ é um funcional linear contínuo que satisfaz $\tau(ab) = \tau(ba)$ (traço);
2. τ é positivo e portanto $\tau(a^*) = \overline{\tau(a)}$ (vide os comentários após B.14) e
3. $\tau(\alpha_g(a)) = \tau(a)$.

Seja τ um traço finito G -invariante sobre A . Para todo $k \in \mathbb{N}$ existe uma única aplicação k -linear $\tau_k : \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_k \rightarrow \Lambda \mathfrak{g}^*$, tal que

$$\tau_k(a_1 \otimes w_1, \dots, a_k \otimes w_k) = \tau(a_1 \dots a_k) w_1 \wedge \dots \wedge w_k.$$

Vale ressaltar que $\tau_0 = \tau$ é simplesmente o traço da álgebra A e também que algumas vezes τ_k será entendido como a composição da aplicação k -linear definida

acima com o traço usual das matrizes, já que estaremos trabalhando com elementos de $M_n(\Omega)$.

Cabe também observar que $\tau_k(a_1 \otimes w_1, \dots, a_k \otimes w_k) = \tau_1(a_1 \dots a_k \otimes w_1 \wedge \dots \wedge w_k)$ e este fato será constantemente utilizado durante esta seção.

Lema 1.9 *A aplicação $\tau_k : \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_k \rightarrow \Lambda \mathfrak{g}^*$ acima definida é um traço graduado, isto é, para $i = 1, 2, \dots, k-1$ vale*

$$\tau_k(\theta_1, \dots, \theta_k) = (-1)^{gr(\theta_i)gr(\theta_{i+1})} \tau_k(\theta_1, \dots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \theta_i, \theta_{i+2} \dots \theta_k).$$

Demonstração: Provaremos primeiramente que τ_k está bem definido e isto se faz necessário, já que os elementos de Ω não possuem representação única.

Sejam $\sum_{i=1}^N a_i \otimes w_i = \sum_{j=1}^M b_j \otimes \lambda_j$ elementos de Ω e $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ uma base de \mathfrak{g} .

Temos então

$$\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N w_i(X_k) a_i \right) \otimes \hat{X}_k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^M \lambda_j(X_k) b_j \right) \otimes \hat{X}_k,$$

logo

$$\sum_{i=1}^N w_i(X_k) a_i = \sum_{j=1}^M \lambda_j(X_k) b_j.$$

Disto

$$\begin{aligned} \tau_1\left(\sum_{i=1}^N a_i \otimes w_i\right) &= \sum_{i=1}^N \tau(a_i) w_i = \sum_{i=1}^N \tau(a_i) \sum_{k=1}^n w_i(X_k) \hat{X}_k \\ &= \sum_{k=1}^n \tau\left(\sum_{i=1}^N w_i(X_k) a_i\right) \hat{X}_k = \sum_{k=1}^n \tau\left(\sum_{j=1}^M \lambda_j(X_k) b_j\right) \hat{X}_k \\ &= \sum_{j=1}^M \tau(b_j) \sum_{k=1}^n \lambda_j(X_k) \hat{X}_k = \sum_{j=1}^M \tau(b_j) \lambda_j \\ &= \tau_1\left(\sum_{j=1}^M b_j \otimes \lambda_j\right). \end{aligned}$$

Provamos assim que τ_1 está bem definido, mas decorre da observação anterior a este lema que isto basta para que τ_k esteja bem definida.

Observemos agora que o sinal é alterado a cada permutação de elementos consecutivos em $\tau_k(a_1 \otimes w_1, \dots, a_k \otimes w_k)$, de fato

$$\begin{aligned}
& \tau_k(a_1 \otimes w_1, \dots, a_i \otimes w_i, a_{i+1} \otimes w_{i+1}, \dots, a_k \otimes w_k) \\
&= \tau(a_1 \dots a_i a_{i+1} \dots a_k) w_1 \wedge \dots \wedge w_{i-1} \wedge w_i \wedge w_{i+1} \dots w_k \\
&= \tau(a_1 \dots a_{i-1} a_{i+1} a_i a_{i+2} \dots a_k) w_1 \wedge \dots \wedge w_{i-1} \wedge w_i \wedge w_{i+1} \wedge \dots w_k \\
&= (-1)^{gr(w_i)gr(w_{i+1})} \tau(a_1 \dots a_{i-1} a_{i+1} a_i a_{i+2} \dots a_k) w_1 \dots w_{i-1} \wedge w_{i+1} \wedge w_i \wedge w_{i+2} \dots w_k \\
&= (-1)^{gr(w_i)gr(w_{i+1})} \tau_k(a_1 \otimes w_1, \dots \\
&\quad \dots, a_{i-1} \otimes w_{i-1}, a_{i+1} \otimes w_{i+1}, a_i \otimes w_i, a_{i+2} \otimes w_{i+2}, \dots, a_k \otimes w_k).
\end{aligned}$$

Além disso, dado $a \in A^\infty$ e $B = b \otimes w \in \Omega$, vale $\tau_1(aB) = \tau_1(Ba)$, já que

$$\begin{aligned}
\tau_1(aB) &= \tau_1(a(b \otimes w)) = \tau_1((ab) \otimes w) = \tau(ab)w \\
&= \tau(ba)w = \tau_1(ba \otimes w) = \tau_1(b \otimes wa) = \tau_1(Ba).
\end{aligned}$$

■

Além de τ_k estar bem definido um fato bastante importante é o de que

$$\tau(\delta(a)) = 0 \quad , \quad \forall a \in A^\infty,$$

pois dado $a \in A^\infty$ e $X \in \mathfrak{g}$ com $g'_0 = X$, pela continuidade e pela G -invariância de τ temos:

$$\tau(\delta_X(a)) = \tau \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha_{g_t}(a) - a}{t} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tau(\alpha_{g_t}(a)) - \tau(a)}{t} = 0 \quad (1.1)$$

Desta igualdade decorre

$$\tau_1 \circ d = d \circ \tau_1 \quad (1.2)$$

pois

$$d(\tau_1(a \otimes w)) = d(\tau(a)w) = \tau(a)dw$$

e

$$\tau_1(d(a \otimes w)) = \tau_1(\delta(a)w + adw) = \tau(\delta(a))w + \tau(a)dw = \tau(a)dw.$$

Outro fato que será utilizado na proposição que segue é o de que o caminho (homotopia) entre duas curvaturas dada pela curva

$$\begin{aligned}\Theta : [0, 1] &\rightarrow A^\infty \otimes \Lambda^2 \\ t &\mapsto \Theta_t = \Theta_0 + p(d(t\Gamma) + t\Gamma \wedge t\Gamma)p\end{aligned}$$

vide a Proposição 1.6, é diferenciável em relação a t , observando que esta é a derivação usual de uma curva no espaço de Fréchet $A^\infty \otimes \Lambda^2$.

Além disso, $\frac{d}{dt}\Theta_t = 0 + p(d(\Gamma) + \Gamma \wedge t\Gamma + t\Gamma \wedge \Gamma)p$ e τ_1 é um traço graduado, como vimos no Lema 1.9, logo

$$\tau_1\left(\frac{d}{dt}\Theta_t\right) = \tau_1(pd\Gamma p).$$

Como $\Gamma \in pM_n(A^\infty)p$, então $d(\tau_1(\Gamma)) = d(\tau_1(p\Gamma p))$. Assim por (1.2) temos

$$d(\tau_1(\Gamma)) = d(\tau_1(p\Gamma p)) = \tau_1(d(p\Gamma p)) = \tau_1(dp\Gamma p + p d\Gamma p - p\Gamma dp).$$

Utilizando o fato de $pdpp = 0$, visto no Lema 1.7, o final da demonstração do Lema 1.9 nos leva a concluir que

$$\begin{aligned}d(\tau_1(\Gamma)) &= \tau_1(pd\Gamma p) + \tau_1(dp\Gamma p) - \tau_1(p\Gamma dp) = \tau_1(pd\Gamma p) + \tau_1(pdpp\Gamma) - \tau_1(\Gamma dpp) \\ &= \tau_1(pd\Gamma p) + \tau_1(pdpp\Gamma) - \tau_1(\Gamma pdpp) = \tau_1(pd\Gamma p).\end{aligned}$$

Portanto

$$\tau_1\left(\frac{d}{dt}\Theta_t\right) = d(\tau_1(\Gamma)).$$

Com as informações que temos até aqui podemos enfim enunciar e demonstrar o teorema a seguir que é essencial na definição do caráter de Chern-Connes.

Proposição 1.10 *Com as notações definidas até o momento podemos afirmar que a forma diferencial $\tau_k(\Theta, \Theta, \dots, \Theta) \in \Lambda^{2k}\mathfrak{g}^*$ é fechada e sua classe de cohomologia independe da conexão escolhida em M^∞ .*

Demonstração: Como provaremos, a seguir, que a forma $\tau_k(\Theta, \Theta, \dots, \Theta)$ independe da conexão tomada, basta verificarmos, a princípio, que $\tau_k(\Theta_0, \Theta_0, \dots, \Theta_0)$ é uma forma fechada, ou seja, $d(\tau_k(\Theta_0, \Theta_0, \dots, \Theta_0)) = 0$.

Da equação 1.5 e das observações feitas após a definição de τ_k , respectivamente, temos

$$\begin{aligned}\tau_k(\Theta_0, \Theta_0, \dots, \Theta_0) &= \tau_k(pdp \wedge dp, \dots, pdp \wedge dp) = \tau(p^k)dp \wedge dp \wedge \dots \wedge dp \wedge dp \\ &= \tau(p)(dp \wedge dp)^k = \tau_1(p(dp \wedge dp)^k).\end{aligned}$$

Vimos também, equação (1.2), que $\tau_1 \circ d = d \circ \tau_1$, então

$$\begin{aligned}d(\tau_k(\Theta_0, \Theta_0, \dots, \Theta_0)) &= d(\tau_1(pdp^{2k})) = \tau_1(d(pdp^{2k})) \\ &= \tau_1(dp \wedge dp^{2k}) = \tau_1(dp^{2k+1}) = 0,\end{aligned}$$

isto porque pelo final da demonstração do lema 1.9 temos

$$\begin{aligned}\tau_1(dp^{2k+1}) &= \tau_1((2p-1)^2 dp^{2k+1}) \\ &= \tau_1((2p-1)dp^{2k+1}(2p-1))\end{aligned}$$

e pelo Lema 1.7 podemos concluir que

$$\begin{aligned}\tau_1(dp^{2k+1}) &= -\tau_1(-(2p-1)dp^{2k+1}(2p-1)) \\ &= -\tau_1(-(-1)^{2k+1}(2p-1)^2 dp^{2k+1}) \\ &= -\tau_1(dp^{2k+1}).\end{aligned}$$

Resta portanto provar que $\tau_k(\Theta, \Theta, \dots, \Theta)$ independe da conexão tomada, ou o que tem o mesmo efeito e que será demonstrado a seguir, que

$$\tau_k(\Theta, \Theta, \dots, \Theta) - \tau_k(\Theta_0, \Theta_0, \dots, \Theta_0)$$

é uma forma exata.

Lembrando que dada uma conexão ∇ qualquer temos $\nabla = \nabla^0 + \Gamma$, como visto no lema 1.3, assim tomemos $\nabla_t = \nabla^0 + t\Gamma$, para $t \in [0, 1]$, um caminho entre ∇ e ∇^0 cuja curvatura será simbolizada por Θ_t .

Utilizando $\Theta_t = \Theta_0 + p(d(t\Gamma) + t\Gamma \wedge t\Gamma)p \in \Omega^2$ como visto na Proposição 1.6 e também as observações feitas antes do enunciado deste teorema temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\tau_k(\Theta_t, \dots, \Theta_t) &= \sum_{i=0}^{k-1} \tau_k(\underbrace{\Theta_t, \dots, \Theta_t}_i, \frac{d}{dt}\Theta_t, \underbrace{\Theta_t, \dots, \Theta_t}_{k-i-1}) = k\tau_k(\frac{d}{dt}\Theta_t, \Theta_t, \dots, \Theta_t) \\ &= k\tau_k(pd(\Gamma)p, \Theta_t, \dots, \Theta_t) = d(k\tau_k(\Gamma, \Theta_t, \dots, \Theta_t)).\end{aligned}$$

Como $\tau_k(\Theta, \Theta, \dots, \Theta) - \tau_k(\Theta_0, \Theta_0, \dots, \Theta_0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} \tau_k(\Theta_t, \dots, \Theta_t) dt$, como esta integração é um limite de somas e portanto comuta com d e também do fato de $\frac{d}{dt} \tau_k(\Theta_t, \dots, \Theta_t) = d(k\tau_k(\Gamma, \Theta_t, \dots, \Theta_t))$, podemos concluir que esta forma fechada independe da conexão tomada em M^∞ .

■

Cabe observar ainda que dadas duas projeções p e q em $\mathcal{P}_\infty(A^\infty)$ equivalentes, isto é, $[p]_0 = [q]_0 \in K_0(A)$ temos $[\tau_k(\Theta_0, \dots, \Theta_0)] = [\tau_k(\theta_0, \dots, \theta_0)]$, sendo Θ_0 e θ_0 as curvaturas das conexões de Levi-Civita associadas as projeções p e q , respectivamente, e $[\cdot]$ denotando a classe de cohomologia das formas invariantes à esquerda do grupo de Lie G .

Note que $\tau \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \tau(a)$, para qualquer $a \in A$, já que por abuso de notação $\tau \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \tau \circ Tr \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$, onde Tr é o traço usual das matrizes.

Se $p \sim_0 q$, por 5.2.12 de [WO], sabemos que $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, onde \sim_h significa que estas matrizes são homotópicas por caminho. Portanto podemos tomar para cada $t \in [0, 1]$ a curvatura $\Theta_t = p_t dp_t \wedge dp_t$ com Θ_0 a própria Θ_0 e $\Theta_1 = \theta_0$.

Como visto nas observações feitas antes da Proposição 1.10 sabemos que existe $\frac{d}{dt} \theta_t$, que denotaremos apenas por θ' . Para $\theta_t = p_t dp_t \wedge dp_t$; onde p_t é uma homotopia que, como no Lema 4 de [F], podemos supor derivável em relação a variável t ; temos

$$\theta' = p' dp \wedge dpp + p(dp' \wedge dp + dp \wedge dp') + pdp \wedge dpp' = p'\theta + \theta p' + pd(p'dp - dpp')p.$$

Note que estamos omitindo o índice t para simplificar a notação e também que estamos denotando por p' a derivação de p_t em relação a t .

Assim como para a Proposição 1.10, podemos utilizar o Lema 1.7 para provar que $pp'p = 0$, logo $\theta p' = p'\theta = 0$, e ainda p comuta com $p'dp$ e dpp' e portanto $pd(p'dp - dpp')p = pd(p(p'dp - dpp'))p$. Assim

$$\theta' = p'\theta + \theta p' + pd(p'dp - dpp')p = pd(p'dp - dpp')p.$$

Utilizando agora o fato de que $pd(\theta)p = 0$, análogo ao visto após o Lema 1.7, e também que $\tau_1(\frac{d}{dt}(\theta^k)) = k\tau_1(\theta'\theta^{k-1})$, assim como utilizado no final da demonstração anterior, temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\tau_k(\Theta_t, \dots, \Theta_t) &= k\tau_1(\theta'\theta^{k-1}) = k\tau_1(pd(p'dp - dpp')p\theta^{k-1}) \\ &= k\tau_1(pd((p'dp - dpp')\theta^{k-1})p) = d(k\tau_1(p(p'dp - dpp')\theta^{k-1})).\end{aligned}$$

Como $\tau_k(\Theta, \Theta, \dots, \Theta) - \tau_k(\Theta_0, \Theta_0, \dots, \Theta_0) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\tau_k(\Theta_t, \dots, \Theta_t) dt$ e

$$\frac{d}{dt}\tau_k(\Theta_t, \dots, \Theta_t) = d(k\tau_1(p(p'dp - dpp')\theta^{k-1})),$$

então $\tau_k(\Theta, \Theta, \dots, \Theta) - \tau_k(\Theta_0, \Theta_0, \dots, \Theta_0)$ é exata e portanto

$$[\tau_k(\Theta_0, \dots, \Theta_0)] = [\tau_k(\theta_0, \dots, \theta_0)]$$

como queríamos.

A Proposição 1.10 e a observação acima nos permitem definir, como feito na geometria diferencial, o caráter de Chern

$$Ch_\tau([p]_0) = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^k \frac{1}{k!} \tau_k(\Theta, \dots, \Theta) \right],$$

que pelo Lema 1.7 e pela proposição anterior também pode ser definido como

$$\begin{aligned}Ch_\tau([p]_0) &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^k \frac{1}{k!} \tau_k(\Theta_0, \dots, \Theta_0) \right] \\ &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^k \frac{1}{k!} \tau_k(pdp \wedge dp, \dots, pdp \wedge dp) \right] \\ &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^k \frac{1}{k!} \tau_1(p(dp \wedge dp)^k) \right] \in H_{\mathbb{C}}^*(\mathfrak{g}).\end{aligned}$$

Note que G e \mathfrak{g} têm dimensão finita, logo $H_{\mathbb{C}}^*(\mathfrak{g}) = 0$, para $*$ maior que a dimensão de \mathfrak{g} e portanto qualquer das somas acima é finita.

Podemos melhorar um pouco mais esta definição lembrando que o anel de cohomologia de uma álgebra de Lie é isomorfo ao anel de cohomologia das formas invariantes de seu grupo de Lie, isto é, $H^*(\mathfrak{g}) \simeq H^*(G)$, vide 10.1.6 de [L]. Além disso, a soma acima é sempre finita logo $Ch_\tau([p]_0) \in H^{\text{par}}(G)$.

Provemos agora que em cada classe de equivalência da equação acima o representante obtido pela projeção p é na verdade uma forma real.

Lema 1.11 *Dada $p \in M_n(A^\infty)$ projeção, então $\frac{1}{(2\pi i)^k} \tau_k(p(dp \wedge dp)^k)$ é um forma real, ou seja, $Ch_\tau([p]_0) \in H_{\mathbb{R}}^{par}(G)$.*

Demonstração: Em primeiro lugar vamos mostrar que dado $da \wedge db \in A^\infty \otimes \Omega^2$, temos $(da \wedge db)^* = -(db^* \wedge da^*)$.

De fato, dados $X, Y \in \mathfrak{g}$ e lembrando por A.4 que δ é uma representação, temos

$$\begin{aligned} (da \wedge db)^*(X, Y) &= ((da \wedge db)(X, Y))^* = (\delta_X(a)\delta_Y(b) - \delta_Y(a)\delta_X(b))^* \\ &= \delta_Y(b^*)\delta_X(a^*) - \delta_X(b^*)\delta_Y(a^*) = -(\delta_X(b^*)\delta_Y(a^*) - \delta_Y(b^*)\delta_X(a^*)) \\ &= -(db^* \wedge da^*)(X, Y). \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \overline{\tau_1(p(dp \wedge dp)^k)} &= \tau_1((p(dp \wedge dp)^k)^*) = \tau_1((-1)^k(dp \wedge dp)^k p) = (-1)^k \tau_1(p(dp \wedge dp)^k), \\ \text{ou seja, } \frac{1}{(2\pi i)^k} \tau_1(p(dp \wedge dp)^k) &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

■

Com isto podemos enfim definir o caráter de Chern-Connes para o caso par.

Definição 1.12 *Com as notações que apresentamos até o momento o caráter de Chern-Connes é o homomorfismo $Ch_\tau : K_0(A) \rightarrow H_{\mathbb{R}}^{par}(G)$, dado por*

$$\begin{aligned} Ch_\tau([p]_0) &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^k \frac{1}{k!} \tau_k(\Theta, \dots, \Theta) \right] \\ &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^k \frac{1}{k!} \tau_k(\Theta_0, \dots, \Theta_0) \right] \\ &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^k \frac{1}{k!} \tau_1(p(dp \wedge dp)^k) \right]. \end{aligned}$$

É conveniente lembrar que as somas da definição acima são finitas, já que se anulam para os valores em que $2k$ é maior do que a dimensão do grupo G e esta é finita.

1.2 A extensão para $K_1(A)$: o caso ímpar

Nosso objetivo nesta seção é o de mostrar que se na definição do caráter de Chern-Connes, dada na seção anterior, trocarmos o C^* -sistema dinâmico (A, G, α) pelo também C^* -sistema dinâmico $(A \otimes C(S^1), G \times S^1, \alpha')$, com a ação α' dada por $\alpha'_{(g,h)}(x \otimes f) = \alpha_g(x) \otimes f_h$ onde $f_h(t) = f(t - h)$, estenderemos Ch_τ para $ch_\tau : K_0(A) \oplus K_1(A) \rightarrow H_{\mathbb{R}}^*(G)$.

Observação 1.13 *Como vimos em B.25 um resultado clássico de K-teoria, que também pode ser visto com mais detalhes em 8.B de [WO] e 9.4.1 de [B], é o de que a partir da sequência exata cindida*

$$0 \longrightarrow SA \longrightarrow C(S^1, A) \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

obtemos

$$K_0(C(S^1, A)) = K_0(A) \oplus K_0(SA) \simeq K_0(A) \oplus K_1(A)$$

e como $C(S^1) \otimes A \simeq C(S^1, A)$, temos

$$K_0(C(S^1) \otimes A) \simeq K_0(A) \oplus K_1(A).$$

Observação 1.14 *Da mesma forma, pela fórmula de Künneth para o produto de cohomologias, vide exemplo 3B.3 de [H1], temos $H^k(G \times S^1) \simeq H^k(G) \oplus H^{k-1}(G)$, isomorfismo este dado por*

$$\begin{aligned} H^k(G) \oplus H^{k-1}(G) &\rightarrow H^k(G \times S^1) \\ (a, b) &\mapsto \pi_1^*(a) + \pi_1^*(b) \wedge d\theta \end{aligned}$$

ressaltando que π_1^ é o pull-back da projecção $\pi_1 : G \times S^1 \rightarrow G$.*

Com isto, temos $H^{2k}(G \times S^1) \simeq H^{2k}(G) \oplus H^{2k-1}(G)$ e como $H^k(G) = 0$, para $k < 0$, então

$$H^{par}(G \times S^1) \simeq H^*(G).$$

Levando-se em conta os isomorfismos dados pela Observação 1.13 e pela Observação 1.14, ao efetuarmos a mudança do C^* -sistema dinâmico (A, G, α) pelo $(A \otimes C(S^1), G \times S^1, \alpha')$ na Definição 1.12, teremos

$$ch_\tau : K_0(A) \oplus K_1(A) \simeq K_0(A \otimes C(S^1)) \rightarrow H^{par}(G \times S^1) \simeq H^*(G).$$

Note que ch_τ restrito a $K_0(A)$ é exatamente $Ch_\tau : K_0(A) \rightarrow H^{\text{par}}(G)$. Por este motivo iremos daqui para a frente nos preocupar com o que acontece no caso ímpar, isto é, com o que acontece com ch_τ quando calculado nas classes de unitários $[u]_1$ de $K_1(A)$.

Seja $[u]_1$ uma classe de equivalência em $K_1(A)$ e portanto $u \in \mathcal{U}_n(\mathcal{A})$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Utilizando o isomorfismo $\theta_{\mathcal{A}}$ entre $K_1(A)$ e $K_0(SA)$, como pode ser visto em B.21 ou também em 7.2.5 de [WO], sabemos que $[u]_1 \in K_1(A)$, de dimensão $n \in \mathbb{N}$, é levado em $[p]_0 - [p_n]_0$, com p e p_n projeções em $\mathcal{P}_{2n}(SA)$ ⁴ dadas por

$$p_n = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0_n \end{pmatrix}$$

e $p : [0, 2\pi] \ni \theta \mapsto p_\theta$, com $p_\theta = w_\theta p_n w_\theta^*$ para

$$w_\theta = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{4}) & -\text{sen}(\frac{\theta}{4}) \\ \text{sen}(\frac{\theta}{4}) & \cos(\frac{\theta}{4}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^* & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{4}) & \text{sen}(\frac{\theta}{4}) \\ -\text{sen}(\frac{\theta}{4}) & \cos(\frac{\theta}{4}) \end{pmatrix},$$

efetuando-se as multiplicações matriciais e utilizando algumas simplificações trigonométricas, temos em suma

$$p_\theta = \begin{pmatrix} 1_n - \frac{\text{sen}^2(\theta/2)}{4}(1-u)(1-u^*) & (u-1)\frac{\text{sen}(\theta/2)}{2} [\cos^2(\frac{\theta}{4}) + u\text{sen}^2(\frac{\theta}{4})] \\ (u^*-1)\frac{\text{sen}(\theta/2)}{2} [\cos^2(\frac{\theta}{4}) + u^*\text{sen}^2(\frac{\theta}{4})] & \frac{\text{sen}^2(\theta/2)}{4}(1-u)(1-u^*) \end{pmatrix}.$$

Assim através destes isomorfismos, ou melhor, através da Observação 1.13 e da Observação 1.14 temos para u , p e p_n , como acima,

$$\begin{aligned} ch_\tau : K_1(\mathcal{A}) &\hookrightarrow K_0(C(S^1) \otimes \mathcal{A}) \rightarrow H^{\text{par}}(G \times S^1) \simeq H^*(G) \\ [u]_1 &\mapsto [p]_0 - [p_n]_0 \mapsto Ch_\tau([p]_0 - [p_n]_0). \end{aligned}$$

E portanto para $[u]_1 \in K_1(\mathcal{A})$ temos

$$ch_\tau([u]_1) = Ch_\tau([p]_0 - [p_n]_0) \in H^*(G).$$

⁴Estamos utilizando aqui SA visto como $\{f \in C([0, 2\pi], A) : f(0) = f(2\pi) = 0\}$.

Capítulo 2

O caráter de Chern-Connes de

$$\overline{\Psi_{cl}^0(S^1)}$$

Neste capítulo explicitaremos o caráter de Chern-Connes, mais precisamente a matriz da transformação dada por este homomorfismo, definido em [C1] e apresentado em detalhes no capítulo anterior, no caso em que o C^* -sistema dinâmico em questão é $(\overline{\Psi_{cl}^0(S^1)}, S^1, \alpha)$, onde a ação α é a de conjugação pela translação no grupo de Lie S^1 e $\overline{\Psi_{cl}^0(S^1)}$ é a C^* -álgebra gerada pelos operadores pseudodiferenciais clássicos de ordem zero na variedade S^1 .

Cabe ressaltar que a ação α tomada é de classe C^∞ em $\Psi_{cl}^0(S^1)$ e portanto contínua em seu fecho, isto é, contínua em $\overline{\Psi_{cl}^0(S^1)}$. Além disso, $\Psi_{cl}^0(S^1)$ é invariante pelo cálculo funcional holomorfo e portanto podemos tomar a álgebra A^∞ utilizada na definição do caráter de Chern-Connes como sendo $\Psi_{cl}^0(S^1)$, ou seja, estamos de fato calculando o caráter de Chern-Connes para a álgebra dos operadores pseudodiferenciais clássicos de ordem zero de S^1 .

Como visto no capítulo anterior, para calcularmos o homomorfismo de Chern-Connes precisamos antes conhecer os grupos de K-teoria da C^* -álgebra $\overline{\Psi_{cl}^0(S^1)}$ e seus geradores e para isto utilizaremos alguns resultados clássicos de "Comparison Algebras" que podem ser vistos em VI.2 de [Co] ou em [M2] e mais especificamente, neste caso em que a variedade é S^1 , pode-se consultar também [M1].

Um destes resultados é o de que $\overline{\Psi_{cl}^0(S^1)}$ é isomorfa a C^* -álgebra \mathcal{A} que definire-

mos a seguir. Mas para tal lembremos que $a(D_\theta) = F_d^{-1} M_a F_d$, onde M_a é o operador de multiplicação pela seqüência $(a_i) \in CS(\mathbb{Z})$, F_d designa a transformada de Fourier discreta, isto é, $F_d : L^2(S^1) \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$, onde $(F_d u)_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{u}(\theta) e^{-ij\theta} d\theta$, $j \in \mathbb{Z}$ e $\tilde{u}(\theta) = u(e^{i\theta})$ e $CS(\mathbb{Z}) = \{(a_i)_{i \in \mathbb{Z}} : \lim_{i \rightarrow \infty} a_i = a(\infty) \text{ e } \lim_{i \rightarrow -\infty} a_i = a(-\infty) \text{ existem}\}$.

Definição 2.1 Denotaremos por \mathcal{A} a C^* -subálgebra de $\mathcal{L}(L^2(S^1))$, operadores limitados de $L^2(S^1)$, gerada por \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2 , com $\mathcal{A}_1 = \{M_a : a \in C^\infty(S^1)\}$ e $\mathcal{A}_2 = \{b(D_\theta) : b \in CS(\mathbb{Z})\}$.

Um fato bastante conhecido e que pode ser visto em [M2] é o de que $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$ e que a seqüência

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\pi} \mathcal{A}/\mathcal{K} \longrightarrow 0 \quad (2.1)$$

é exata. E ainda, pelo Teorema 2 de [M2] e seu corolário, sabemos que existe um isomorfismo φ entre o quociente \mathcal{A}/\mathcal{K} e $C(S^*S^1) \xrightarrow{\psi} C(S^1 \times \{-\infty, +\infty\})$. Como dito anteriormente isto é uma consequência de um resultado mais geral sobre "Comparison Algebras" que pode ser visto em VI.2 de [Co].

Ao compormos φ com π , obtemos o isomorfismo $\sigma = \varphi \circ \pi$ conhecido como símbolo principal. E finalmente, compondo σ com ψ obtemos um isomorfismo que transforma os geradores da seguinte maneira,

$$\psi \circ \sigma([M_a]) = \psi([\sigma_{M_a}]_{\mathcal{K}}) = (a, a) \quad , \quad \text{para } a \in C^\infty(S^1) \quad \text{e} \quad (2.2)$$

$$\psi \circ \sigma([b(D_\theta)]) = \psi([\sigma_{b(D_\theta)}]_{\mathcal{K}}) = (b(-\infty), b(\infty)) \quad , \quad \text{para } (b_j) \in CS(\mathbb{Z}). \quad (2.3)$$

Pela periodicidade de Bott, vide B.22, a partir de uma seqüência exata curta obtemos a seqüência exata de seis termos da K-teoria complexa, como pode ser visto em B.23. E em nosso caso, isto é, para a seqüência (2.1), obtemos a seqüência exata

cíclica dada por

$$\begin{array}{ccccc}
 K_0(\mathcal{K}) & \longrightarrow & K_0(\mathcal{A}) & \longrightarrow & K_0(\mathcal{A}/\mathcal{K}) \\
 \uparrow \delta_1 & & & & \downarrow \delta_0 \\
 K_1(\mathcal{A}/\mathcal{K}) & \longleftarrow & K_1(\mathcal{A}) & \longleftarrow & K_1(\mathcal{K})
 \end{array}
 \tag{2.4}$$

Como pode ser visto em B.15 ou também na tabela de grupos de K-teoria que consta ao final de [RLL] temos

$$K_0(\mathcal{K}) = \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad K_1(\mathcal{K}) = 0$$

e como $\mathcal{A}/\mathcal{K} \simeq C(S^1 \times \{-\infty, +\infty\})$, por B.24 temos portanto

$$K_0(\mathcal{A}/\mathcal{K}) \simeq K_0(C(S^1 \times \{-\infty, +\infty\})) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \quad \text{e}$$

$$K_1(\mathcal{A}/\mathcal{K}) \simeq K_1(C(S^1 \times \{-\infty, +\infty\})) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Quando \mathcal{K} aparece na seqüência exata curta, como em nosso exemplo 2.1, a aplicação $\delta_1 : K_1(\mathcal{A}/\mathcal{K}) \rightarrow K_0(\mathcal{K}) = \mathbb{Z}$ é o índice de Fredholm, vide 8.3.2 de [B] ou os comentários após B.19. E, além disso, neste caso particular δ_1 é sobrejetora, como mostra o seguinte lema.

Lema 2.2 *A aplicação do índice $\delta_1 : K_1(\mathcal{A}/\mathcal{K}) \rightarrow K_0(\mathcal{K})$ é sobrejetora.*

Demonstração: Tomemos o operador $B \in \mathcal{A}$, dado por

$$Bu(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} z^j b_j(z) \hat{u}_j, \quad \text{onde} \quad b_j(z) = \begin{cases} 1 & , \text{se } j \geq 0 \\ z & , \text{se } j < 0 \end{cases}.$$

Lembrando que \mathcal{A} é gerada por \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2 , como na Definição 2.1, podemos mostrar que o operador B está de fato em \mathcal{A} , pois $B = M_a(I - H(D_\theta)) + H(D_\theta)$ para $a(z) = z$ e $H(j) = \begin{cases} 1 & , \text{se } j \geq 0 \\ 0 & , \text{se } j < 0 \end{cases}$.

$$\text{Assim, } F_d B F_d^{-1}(u_j)_{j \in \mathbb{Z}}|_k = \begin{cases} u_{k-1} & , \text{ se } k < 0 \\ u_0 + u_{-1} & , \text{ se } k = 0 \\ u_k & , \text{ se } k > 0 \end{cases} \quad , \text{ ou seja,}$$

$$\delta_1([B]_{\mathcal{K}})_1 = \text{ind}([B]_{\mathcal{K}}) = \dim(\ker B) - \text{codim}(\text{Im} B) = 1 - 0 = 1$$

e portanto existe um operador que é levado no gerador do grupo $K_0(\mathcal{K})$, logo a aplicação δ_1 é sobrejetora.

■

Com base nestas informações, isto é, nas equações (2.2) e (2.3) e no lema anterior, o diagrama (2.4) pode ser entendido como

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{0} & K_0(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} . \\ \delta_1 \uparrow & & & & \downarrow \delta_0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \longleftarrow & K_1(\mathcal{A}) & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

Denotaremos por (f, g) a função de $C(S^1 \times \{-\infty, \infty\})$ em que $f \in C(S^1)$ está sobre $S^1 \times \{-\infty\}$ e $g \in C(S^1)$ sobre $S^1 \times \{\infty\}$ e também, como em B.24, designamos por \mathfrak{z} , \mathfrak{o} e $\mathfrak{1}$, respectivamente, as funções dadas por $\mathfrak{z}(z) = z$, $\mathfrak{o}(z) = 0$ e $\mathfrak{1}(z) = 1$, para todo $z \in S^1$.

Pela seqüência exata cíclica acima temos portanto que

$$K_0(\mathcal{A}) \simeq K_0(\mathcal{A}/\mathcal{K}) \simeq K_0(C(S^* S^1)) = [(\mathfrak{1}, \mathfrak{o})]_0 \mathbb{Z} \oplus [(\mathfrak{o}, \mathfrak{1})]_0 \mathbb{Z}.$$

Mais precisamente, pelo Lema 2.2 temos $\sigma_{H(D_\theta)} = (\mathfrak{1}, \mathfrak{o})$, logo

$$K_0(\mathcal{A}) = [[H(D_\theta)]_{\mathcal{K}}]_0 \mathbb{Z} \oplus [[I - H(D_\theta)]_{\mathcal{K}}]_0 \mathbb{Z}.$$

E também, como $\delta_1([\mathfrak{1}, \mathfrak{1}]) = 0$ e $K_1(\mathcal{A}) \simeq \ker \delta_1$, temos

$$K_1(\mathcal{A}) = [[\mathfrak{z}]_{\mathcal{K}}]_1 \mathbb{Z},$$

já que $\sigma_{\mathfrak{z}} = (\mathfrak{1}, \mathfrak{1})$.

Utilizando os grupos de K-teoria que acabamos de calcular e o fato, bastante conhecido, de que $H_{\mathbb{R}}^*(S^1) = H_{\mathbb{R}}^0(S^1) \oplus H_{\mathbb{R}}^1(S^1) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, o caráter de Chern-Connes, para nosso C*-sistema dinâmico $(\overline{\Psi_{cl}^0(S^1)} \simeq \mathcal{A}, S^1, \alpha)$, é dado particularmente por

$$ch_{\tau} : [[H(D_{\theta})]_{\mathcal{K}}]_0 \mathbb{Z} \oplus [[I - H(D_{\theta})]_{\mathcal{K}}]_0 \mathbb{Z} \oplus [[\mathfrak{J}]_{\mathcal{K}}]_1 \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}.$$

Como para $k \geq 2$ temos $H^k(S^1) = 0$, neste nosso exemplo o caso par, isto é, em $K_0(\mathcal{A})$ o caráter de Chern-Connes se resume a parcela do somatório em que $k = 0$. Portanto dada uma projeção p de \mathcal{A} a definição

$$Ch_{\tau}([p]_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi i)^k k!} \tau_k(p(dp)^{2k}),$$

se resume simplesmente a $Ch_{\tau}([p]_0) = \sum_{k=0}^0 \frac{1}{(2\pi i)^k k!} \tau_k(p(dp)^{2k}) = \tau(p)$.

Já o caso ímpar, isto é, o caráter de Chern-Connes calculado em $K_1(\mathcal{A})$ também não se anula apenas para a parcela do somatório em que $k = 1$. Por isto, dado um unitário u de \mathcal{A} , vamos provar que $ch_{\tau}(u) = \frac{1}{2\pi i} \tau(u^* \delta(u))$ e posteriormente calcular este valor.

Na verdade o que vamos provar agora é um resultado mais geral que vale para qualquer grupo a um parâmetro, como afirmado e não demonstrado no *caso particular* (a) de [C1], por isso não faremos referências explícitas ao nosso exemplo particular para provar que dado um unitário u da álgebra temos $ch_{\tau}([u]_1) = \frac{1}{2i\pi} \tau(u^* \delta(u))$ desde que o grupo em questão seja a um parâmetro.

Na discussão feita na segunda seção do capítulo anterior vimos que

$$ch_{\tau}([u]_1) = Ch_{\tau}([p]_0 - [p_n]_0),$$

onde $Ch_{\tau}([p]_0 - [p_n]_0)$ é o caráter de Chern-Connes como dado na Definição 1.12.

Antes de começarmos os cálculos faremos as seguintes observações.

Observação 2.3 *O primeiro termo do somatório de $Ch_{\tau}([p]_0 - [p_n]_0)$ é nulo. De fato, para $k = 0$ temos $\tau_0(p - p_n) = \tau(p - p_n)$ que por abuso de notação representa $\tau \circ Tr(p - p_n)$ e como*

$$p - p_n = \begin{pmatrix} -\frac{\text{sen}^2(\theta/2)}{4} (1 - u)(1 - u^*) & (u - 1) \frac{\text{sen}(\theta/2)}{2} \left[\cos^2\left(\frac{\theta}{4}\right) + u \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{4}\right) \right] \\ (u^* - 1) \frac{\text{sen}(\theta/2)}{2} \left[\cos^2\left(\frac{\theta}{4}\right) + u^* \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{4}\right) \right] & \frac{\text{sen}^2(\theta/2)}{4} (1 - u)(1 - u^*) \end{pmatrix}$$

temos portanto

$$\tau \circ \text{Tr}(p - p_n) = \tau(\text{Tr}(p - p_n)) = 0.$$

Além disso, para $k > 2$ sabemos que $H^k(G) = 0$ e como $dp_n = 0$ temos apenas

$$ch_\tau([u]_1) = Ch_\tau([p]_0 - [p_n]_0) = 0 + \tau_1(pdp \wedge dp) + 0.$$

Para a observação que faremos abaixo estamos utilizando os seguintes fatos

$$dp(X, 0) = \delta_{(X,0)}(p) : S^1 \ni \theta \mapsto \delta_X(p_\theta)$$

e

$$dp(0, d\theta) = \delta_{(0,d\theta)}(p) S^1 \ni \theta \mapsto \frac{\partial p}{\partial \theta}.$$

Além disso, cabe ressaltar que S^1 , aqui parametrizado por $S^1 = \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$, não é nosso exemplo particular e sim S^1 da definição do caráter de Chern-Connes visto na segunda seção do capítulo anterior.

Observação 2.4 *Utilizando o isomorfismo $H^2(G \times S^1) \simeq H^2(G) \oplus H^1(G)$, como na Observação 1.14, e o fato de que $H^2(G) = 0$ temos $H^2(G \times S^1) \simeq H^1(G)$ e através disto podemos concluir que $\tau_1(pdp \wedge dp)$ apresenta o termo $d\theta$. Em outras palavras, de todas as possibilidades para se calcular $dp \wedge dp$ em combinações do tipo $(X, d\theta) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{s}^1$, temos*

$$dp \wedge dp((X, 0), (X, 0)) = \delta_X(p)\delta_X(p) - \delta_X(p)\delta_X(p) = 0$$

e

$$dp \wedge dp((0, d\theta), (0, d\theta)) = \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0.$$

Assim basta calcularmos $pdp \wedge dp((X, 0), (0, d\theta))$, isto é,

$$pdp \wedge dp((X, 0), (0, d\theta)) = p \left(\delta_X(p) \frac{\partial p}{\partial \theta} - \frac{\partial p}{\partial \theta} \delta_X(p) \right).$$

Como

$$p_\theta = \begin{pmatrix} 1_n - \frac{\text{sen}^2(\theta/2)}{4}(1-u)(1-u^*) & (u-1)\frac{\text{sen}(\theta/2)}{2} \left[\cos^2\left(\frac{\theta}{4}\right) + u\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{4}\right) \right] \\ (u^*-1)\frac{\text{sen}(\theta/2)}{2} \left[\cos^2\left(\frac{\theta}{4}\right) + u^*\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{4}\right) \right] & \frac{\text{sen}^2(\theta/2)}{4}(1-u)(1-u^*) \end{pmatrix}$$

$$\text{temos } \delta_X(p) = \begin{pmatrix} \delta_X(p)_{11} & \delta_X(p)_{12} \\ \delta_X(p)_{21} & \delta_X(p)_{22} \end{pmatrix}, \text{ com}$$

- $\delta_X(p)_{11} = \frac{\text{sen}^2(\theta/2)}{4}(\delta(u) + \delta(u^*)),$
- $\delta_X(p)_{12} = \frac{\text{sen}(\theta/2)}{2} \left[\cos^2\left(\frac{\theta}{4}\right) \delta(u) + \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{4}\right) (\delta(u)u + u\delta(u)) \right],$
- $\delta_X(p)_{21} = \frac{\text{sen}(\theta/2)}{2} \left[\cos^2\left(\frac{\theta}{4}\right) \delta(u^*) + \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{4}\right) (\delta(u^*)u^* + u^*\delta(u^*)) \right]$ e
- $\delta_X(p)_{22} = -\delta_X(p)_{11} = -\frac{\text{sen}^2(\theta/2)}{4}(\delta(u) + \delta(u^*)).$

$$\text{E } \frac{\partial p}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial \theta_{11}} & \frac{\partial p}{\partial \theta_{12}} \\ \frac{\partial p}{\partial \theta_{21}} & \frac{\partial p}{\partial \theta_{22}} \end{pmatrix}, \text{ onde}$$

- $\frac{\partial p}{\partial \theta_{11}} = -\frac{\text{sen}(\theta)}{8}(1-u)(1-u^*),$
- $\frac{\partial p}{\partial \theta_{22}} = -\frac{\partial p}{\partial \theta_{11}} = \frac{\text{sen}(\theta)}{8}(1-u)(1-u^*),$
- $\frac{\partial p}{\partial \theta_{12}} = (u-1)\frac{\cos(\theta/2)}{4} \left[\cos^2\left(\frac{\theta}{4}\right) + u\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{4}\right) \right] + (u-1)\frac{\text{sen}(\theta/2)}{2} \left[\frac{-1}{4}\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) + u\frac{1}{4}\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$
e
- $\frac{\partial p}{\partial \theta_{21}} = \frac{\partial p^*}{\partial \theta_{12}}.$

Sendo assim, $pdp \wedge dp = p \left(\delta_X(p) \frac{\partial p}{\partial \theta} - \frac{\partial p}{\partial \theta} \delta_X(p) \right) =$

$$p \left[\begin{pmatrix} \delta_X(p)_{11} & \delta_X(p)_{12} \\ \delta_X(p)_{21} & \delta_X(p)_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial \theta_{11}} & \frac{\partial p}{\partial \theta_{12}} \\ \frac{\partial p}{\partial \theta_{21}} & \frac{\partial p}{\partial \theta_{22}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial \theta_{11}} & \frac{\partial p}{\partial \theta_{12}} \\ \frac{\partial p}{\partial \theta_{21}} & \frac{\partial p}{\partial \theta_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_X(p)_{11} & \delta_X(p)_{12} \\ \delta_X(p)_{21} & \delta_X(p)_{22} \end{pmatrix} \right]$$

após feitas as devidas multiplicações, que em nosso caso foram computadas com o auxílio de um programa computacional matemático e posteriormente conferidas ¹, tomando-se o traço $Tr(pdp \wedge dp)$ obtemos um somatório em que todos os termos, exceto $u^*\delta(u)$, podem ser escritos na forma $\delta(u^m)$, para algum m inteiro. E como $\tau \circ \delta = 0$, vide as explicações dadas para a equação (1.1), temos portanto

$$\tau(pdp \wedge dp) = \tau(Tr(pdp \wedge dp)) = \tau(u^*\delta u). \quad (2.5)$$

Voltando agora ao nosso C^* -sistema dinâmico $(\overline{\Psi_\alpha^0(S^1)}, S^1, \alpha)$ tomemos o traço $\tau = \tau_K \circ \psi \circ \sigma$, onde as aplicações σ e ψ são as dadas pelas equações (2.2) e (2.3) e

¹Como esses cálculos são muito extensos não os apresentamos neste texto, mas aqueles que desejarem vê-los podem consultá-los na página virtual cujo endereço é www.ime.usp.br/~dpdias.

$\tau_{\mathcal{K}}$ é o traço de $C(S^1 \times \{-\infty, \infty\}) \simeq \mathcal{A}/\mathcal{K}$ dado pela combinação linear das integrais sobre cada uma das cópias de S^1 , isto é, $S^1 \times \{-\infty\}$ e $S^1 \times \{\infty\}$.

Simbolicamente temos

$$\tau(a) = \frac{c_1}{2\pi} \int_{S^1} \sigma_a(z, \infty) dz + \frac{c_2}{2\pi} \int_{S^1} \sigma_a(z, -\infty) dz, \quad a \in \mathcal{A}.$$

Este traço, assim definido, é um funcional linear contínuo e invariante pela ação de translação α , mas para que $\tau(a^*) = \overline{\tau(a)}$, como na Definição 1.8, é necessário que c_1 e c_2 sejam números reais.

Só nos resta então calcular o traço dado em cada um dos geradores do grupo, a fim de obter a matriz da transformação dada pelo caráter de Chern-Connes. Portanto, para c_1 e c_2 em \mathbb{R} , temos

$$\tau([H(D_\theta)]_{\mathcal{K}})_0 = \frac{c_1}{2\pi} \int_{S^1} \sigma_{H(D_\theta)}(z, \infty) dz + \frac{c_2}{2\pi} \int_{S^1} \sigma_{H(D_\theta)}(z, -\infty) dz = c_1.$$

De forma análoga $\tau([I - h(D_\theta)]_{\mathcal{K}})_0 = c_2$ e

$$\tau(\mathfrak{z}^{-1} d(\mathfrak{z})) = \frac{c_1}{2\pi} \int_{S^1} \sigma_{\mathfrak{z}}(z, \infty) dz + \frac{c_2}{2\pi} \int_{S^1} \sigma_{\mathfrak{z}}(z, -\infty) dz = 0.$$

Unindo-se as informações acima podemos afirmar que a matriz da transformação dada pelo homomorfismo de Chern-Connes para o C*-sistema dinâmico $(\overline{\Psi_{cl}^0(S^1)}, S^1, \alpha)$ dado por

$$ch_\tau : [[H(D_\theta)]_{\mathcal{K}}]_0 \mathbb{Z} \oplus [[I - H(D_\theta)]_{\mathcal{K}}]_0 \mathbb{Z} \oplus [[\mathfrak{z}]_{\mathcal{K}}]_1 \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$$

é

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Isto pois

$$\tau([H(D_\theta)]_{\mathcal{K}})_0 = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\tau([I - H(D_\theta)]_{\mathcal{K}})_0 = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\tau([\mathfrak{z}]_1) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Capítulo 3

O caráter de Chern-Connes de

$$\overline{\Psi_{cl}^0(S^2)}$$

Nosso objetivo neste capítulo é o de calcular o caráter de Chern-Connes, assim como no capítulo anterior, porém agora para $(\overline{\Psi_{cl}^0(S^2)}, SO(3), \alpha)$, o C*-sistema dinâmico onde $\overline{\Psi_{cl}^0(S^2)}$, que será denotada por \mathcal{A} , é a C*-álgebra gerada pelos operadores pseudodiferenciais clássicos de ordem zero da esfera e a ação α é a de conjugação pela translação no grupo de Lie $SO(3)$, em outras palavras, a ação α leva $g \in SO(3)$ em $T_g A T_g^{-1}$, com $T_g u(x) = u(g^{-1}x)$, para $u \in L^2(S^2)$.

Novamente a ação α é contínua, pois é de classe C^∞ em $\Psi_{cl}^0(S^2)$, como pode ser visto em [CM], e portanto contínua em $\overline{\Psi_{cl}^0(S^2)}$. E repetindo o raciocínio do início do capítulo dois temos $\Psi_{cl}^0(S^2)$ também invariante pelo cálculo funcional holomorfo, ou seja, podemos pensar em $\Psi_{cl}^0(S^2)$ como sendo a álgebra A^∞ do primeiro capítulo e portanto podemos afirmar que estamos de fato calculando o caráter de Chern-Connes da álgebra dos operadores pseudodiferenciais clássicos de ordem zero da variedade S^2 .

Para encontrarmos tal homomorfismo precisamos antes saber quais são os grupos de K-Teoria desta C*-álgebra e assim como feito anteriormente, em (2.1), podemos utilizar a seqüência exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\pi} \mathcal{A}/\mathcal{K} \longrightarrow 0 \quad (3.1)$$

e novamente, como consequência dos resultados de "Comparison Algebras" obtidos por Cordes em VI.2 de [Co], temos para este caso $\mathcal{A}/\mathcal{K} \simeq C(S^*S^2) \simeq C(SS^2)$.

A fim de encontrar os grupos de K-teoria de \mathcal{A} , precisaremos saber de antemão quais são os grupos de K-teoria das funções contínuas sobre o fibrado das esferas ou das coesferas de S^2 , já que estes são homeomorfos. A seção a seguir se dedica a estes cálculos, isto é, ao cálculo dos grupos de K-teoria de $C(SS^2)$ e também de seus geradores.

3.1 A K-teoria do fibrado das esferas da esfera

A seqüência de Mayer-Vietoris é uma ferramenta bastante conhecida e utilizada da Topologia Algébrica e este resultado pode ser estendido para qualquer Teoria de (co)homologia. A idéia básica, como pode ser visto na seção 7.2 de [MS1], é a de que a partir de um espaço X Hausdorff e compacto que é a união de dois subespaços compactos que possuem uma certa inteseccção, como representado no diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \longleftarrow & X_1 \\ \uparrow & & \uparrow \\ X_2 & \longleftarrow & X_1 \cap X_2 \end{array}$$

onde as aplicações em questão são injetoras, podemos obter por dualidade o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} C(X) & \longrightarrow & C(X_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C(X_2) & \longrightarrow & C(X_1 \cap X_2) \end{array}$$

onde as aplicações nada mais são do que restrições e com isto podemos mostrar que

$$C(X) \simeq \{(a_1, a_2) \in C(X_1) \oplus C(X_2) : a_1|_{X_1 \cap X_2} = a_2|_{X_1 \cap X_2}\}.$$

Com base nestas idéias enunciamos o Teorema a seguir cuja demonstração pode ser encontrada em 7.2.1 de [MS1].

Teorema 3.1 *Dado o diagrama comutativo de C^* -álgebras com unidade*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{p_1} & B_1 \\ p_2 \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ B_2 & \xrightarrow{\pi_2} & D \end{array}$$

com A o produto fibrado de B_1 e B_2 sobre D , isto é,

$$A = \{(b_1, b_2) : \pi_1(b_1) = \pi_2(b_2)\} \subseteq B_1 \oplus B_2 ,$$

π_1 e π_2 $*$ -homomorfismos sobrejetivos e p_k , $k = 1$ ou 2 , as restrições das projeções $i_k : B_1 \oplus B_2 \rightarrow B_k$, temos a seqüência exata cíclica de seis termos

$$\begin{array}{ccccc} K_0(A) & \xrightarrow{(p_{1*}, p_{2*})} & K_0(B_1) \oplus K_0(B_2) & \xrightarrow{\pi_{2*} - \pi_{1*}} & K_0(D) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_1(D) & \xleftarrow{\pi_{2*} - \pi_{1*}} & K_1(B_1) \oplus K_1(B_2) & \xleftarrow{(p_{1*}, p_{2*})} & K_1(A) \end{array}$$

O teorema enunciado acima é um caso particular do Teorema 21.2.2 (Seqüência de Mayer-Vietoris para Homologia) de [B] sobre a existência de uma seqüência de Mayer-Vietoris para uma teoria de Homologia qualquer.

Nosso intuito é o de utilizar a seqüência de Mayer-Vietoris, vista no Teorema 3.1, em $C(S^*S^2)$, mas para facilitar os cálculos e a compreensão faremos uso desta seqüência em $C(SS^2)$, já que $C(SS^2) \simeq C(S^*S^2)$ como dito anteriormente. E para isto utilizaremos neste nosso caso particular, isto é, em SS^2 as observações feitas antes do Teorema 3.1 como podemos ver no lema a seguir.

Lema 3.2 *Dado o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} C(SS^2) & \xrightarrow{p_1} & C(D \times S^1) \\ p_2 \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ C(D \times S^1) & \xrightarrow{\pi_2} & C(S^1 \times S^1) \end{array}$$

se as aplicações p_1 e p_2 forem restrições (inclusões) e

$$\begin{array}{ccc} \pi_1 : C(D \times S^1) & \rightarrow & C(S^1 \times S^1) \\ \varphi & \mapsto & \pi_1 \circ \varphi = \varphi|_{S^1 \times S^1} \end{array} \quad e \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned}\pi_2 : C(D \times S^1) &\rightarrow C(S^1 \times S^1) \\ \varphi &\mapsto \pi_2 \circ \varphi(z, w) = \varphi|_{S^1 \times S^1}(z, -z^2 \bar{w}),\end{aligned}\tag{3.3}$$

então

$$C(SS^2) \simeq \{(a_1, a_2) \in C(D \times S^1) \oplus C(D \times S^1) : a_1|_{S^1 \times S^1} = a_2|_{S^1 \times S^1}\}.$$

Demonstração: Vamos entender o porquê destas aplicações, na verdade o porquê de π_2 .

Tomemos as cartas dadas pelas projeções estereográficas $\chi_N : S^2 - \{PN\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\chi_S : S^2 - \{PS\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, mais precisamente,

$$\begin{aligned}\chi_S : S^2 - \{(0, 0, -1)\} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto \left(\frac{x_1}{(1+x_3)}, \frac{x_2}{(1+x_3)} \right) = (S_1, S_2)\end{aligned}\quad \text{e}$$

$$\begin{aligned}\chi_N : S^2 - \{(0, 0, 1)\} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto \left(\frac{x_1}{(1-x_3)}, \frac{x_2}{(1-x_3)} \right) = (N_1, N_2) \quad .\end{aligned}$$

Consequentemente, no fibrado tangente, temos

$$\begin{aligned}T\chi_S : T(S^2 - \{(0, 0, -1)\}) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \\ T_x(S^2 - \{(0, 0, -1)\}) \ni \lambda &\mapsto (\chi_S(x), \xi_1, \xi_2)\end{aligned}\quad \text{e}$$

$$\begin{aligned}T\chi_N : T(S^2 - \{(0, 0, 1)\}) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \\ T_x(S^2 - \{(0, 0, 1)\}) \ni \lambda &\mapsto (\chi_N(x), \eta_1, \eta_2) \quad .\end{aligned}$$

Para entendermos o comportamento da aplicação

$$(\chi_N, \eta_1, \eta_2) \mapsto (\chi_S, \xi_1, \xi_2),$$

basta observar que a restrição $K : (\chi_N) = (N_1, N_2) \mapsto (\chi_S) = (S_1, S_2)$ é dada por

$$\begin{aligned}K : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} &\rightarrow S^2 - \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \\ (N_1, N_2) &\mapsto \left(\frac{2N_1}{1+N_1^2+N_2^2}, \frac{2N_2}{1+N_1^2+N_2^2}, \frac{N_1^2+N_2^2-1}{1+N_1^2+N_2^2} \right) \mapsto \left(\frac{N_1}{N_1^2+N_2^2}, \frac{N_2}{N_1^2+N_2^2} \right) .\end{aligned}$$

Portanto $\frac{\partial(K_1, K_2)}{\partial(N_1, N_2)} = \frac{1}{(N_1^2 + N_2^2)^2} \begin{pmatrix} -N_1^2 + N_2^2 & -2N_1N_2 \\ -2N_1N_2 & N_1^2 - N_2^2 \end{pmatrix}.$

Assim, para $(z, w) \in \mathbb{C}^2$, com $z = (N_1, N_2)$ e $w = (\eta_1, \eta_2)$, temos

$$T(z, w) = T_{\chi_S \circ (T_{\chi_N})^{-1}}(N_1, N_2, \eta_1, \eta_2) = \left(\frac{N_1}{N_1^2 + N_2^2}, \frac{N_2}{N_1^2 + N_2^2}, \frac{\partial(K_1, K_2)}{\partial(N_1, N_2)} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \right),$$

que resumidamente é $T(z, w) = \left(\frac{z}{|z|^2}, \frac{-z^2 \bar{w}}{|z|^4} \right)$, mas quando restrito a $S^1 \times S^1$ temos $T(z, w) = (z, -z^2 \bar{w})$.

Isto explica o fato de π_2 ser dada por

$$\begin{aligned} \pi_2 : C(D \times S^1) &\rightarrow C(S^1 \times S^1) \\ \varphi &\mapsto f_2 \circ \varphi(z, w) = \varphi|_{S^1 \times S^1}(z, -z^2 \bar{w}). \end{aligned}$$

■

Utilizando agora o Teorema 3.1 e as informações do Lema 3.2 obtemos a seqüência exata cíclica

$$\begin{array}{ccccc} K_0(C(SS^2)) & \xrightarrow{(p_{1*}, p_{2*})} & K_0(C(D \times S^1))^2 & \xrightarrow{\pi_{2*} - \pi_{1*}} & K_0(C(S^1 \times S^1))X \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_1(C(S^1 \times S^1)) & \xleftarrow{\pi_{2*} - \pi_{1*}} & K_1(C(D \times S^1))^2 & \xleftarrow{(p_{1*}, p_{2*})} & K_1(C(SS^2)) \end{array} \quad (3.4)$$

Como podemos perceber, para fazer uso desta seqüência precisaremos antes saber quem são $K_i(C(D \times S^1))$ e $K_i(C(S^1 \times S^1))$, para $i = 0$ e $i = 1$, e seus geradores. E para realizarmos estes cálculos utilizaremos alguns resultados de K-teoria apresentados no segundo apêndice deste trabalho.

Lembrando que $C(D \times S^1) \simeq C(S^1, C(D))$ e $C(S^1 \times S^1) \simeq C(S^1, C(S^1))$, podemos então construir as seqüências exatas curtas

$$0 \longrightarrow SC(D) \longrightarrow C(S^1, C(D)) \longrightarrow C(D) \longrightarrow 0$$

e

$$0 \longrightarrow SC(S^1) \longrightarrow C(S^1, C(S^1)) \longrightarrow C(S^1) \longrightarrow 0$$

e por B.25 temos

$$K_i(C(D \times S^1)) = K_{1-i}(C(D)) \oplus K_i(C(D)) \quad \text{e}$$

$$K_i(C(S^1 \times S^1)) = K_{1-i}(C(S^1)) \oplus K_i(C(S^1)).$$

Dos exemplos B.18 e B.24 e dos isomorfismos acima temos:

- $K_0(C(D \times S^1)) = [\mathbf{1}]_0 \mathbb{Z}$
- $K_1(C(D \times S^1)) = [\mathfrak{w}]_1 \mathbb{Z}$
- $K_0(C(S^1 \times S^1)) = [\mathbf{1}]_0 \mathbb{Z} \oplus [\theta_{C(S^1)}(\mathfrak{w})]_0 \mathbb{Z}$
- $K_1(C(S^1 \times S^1)) = [\mathfrak{z}]_1 \mathbb{Z} \oplus [\mathfrak{w}]_1 \mathbb{Z}.$

Com isto o diagrama (3.4) pode ser visto como

$$\begin{array}{ccccc} K_0(C(SS^2)) & \xrightarrow{(p_{1*}, p_{2*})_0} & \mathbb{Z}[\mathbf{1}] \oplus \mathbb{Z}[\mathbf{1}] & \xrightarrow{(\pi_{2*} - \pi_{1*})_0} & \mathbb{Z}[\mathbf{1}] \oplus \mathbb{Z}[\theta_{C(S^1)}(\mathfrak{w})] \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ \mathbb{Z}[\mathfrak{z}] \oplus \mathbb{Z}[\mathfrak{w}] & \xleftarrow{(\pi_{2*} - \pi_{1*})_1} & \mathbb{Z}[\mathfrak{w}] \oplus \mathbb{Z}[\mathfrak{w}] & \xleftarrow{(p_{1*}, p_{2*})_1} & K_1(C(SS^2)). \end{array}$$

Pela definição dada nas equações (3.2) e (3.3) do Lema 3.2 obtemos

$$\pi_{1*}(x, y) = (x, 0) \text{ e } \pi_{2*}(x, y) = (y, 0),$$

ou seja, na linha superior do diagrama anterior temos

$$(\pi_{2*} - \pi_{1*})_0(x, y) = (y - x, 0). \quad (3.5)$$

Além disso, temos $\pi_{1*}([\mathfrak{w}]) = ([\mathfrak{w}])$ e $\pi_{2*}([\mathfrak{w}]) = [-\mathfrak{z}^2 \bar{\mathfrak{w}}]$, ou seja, os geradores da imagem serão $(0, 1)$ e $(2, -1)$ e portanto para a linha inferior do diagrama anterior teremos o homomorfismo

$$(\pi_{2*} - \pi_{1*})_1(x, y) = (2y, -y - x). \quad (3.6)$$

Portanto veremos o diagrama anterior como

$$\begin{array}{ccccc}
K_0(C(SS^2)) & \xrightarrow{(p_{1*}, p_{2*})_0} & \mathbb{Z}[\mathbf{1}] \oplus \mathbb{Z}[\mathbf{1}] & \xrightarrow{(x, y) \mapsto (y-x, 0)} & \mathbb{Z}[\mathbf{1}] \oplus \mathbb{Z}[\theta_{C(S^1)}(\mathfrak{w})] \\
\uparrow \delta_1 & & & & \downarrow \delta_0 \\
\mathbb{Z}[\mathfrak{j}] \oplus \mathbb{Z}[\mathfrak{w}] & \xleftarrow{(x, y) \mapsto (2y, -y-x)} & \mathbb{Z}[\mathfrak{w}] \oplus \mathbb{Z}[\mathfrak{w}] & \xleftarrow{(p_{1*}, p_{2*})_1} & K_1(C(SS^2)).
\end{array}$$

Note que o homomorfismo $(\pi_{2*} - \pi_{1*})_1$, isto é, a aplicação $(x, y) \mapsto (2y, -y-x)$ é injetora, logo a imagem de $(p_{1*}, p_{2*})_1$ é nula. E o núcleo de $(\pi_{2*} - \pi_{1*})_0$, dada por $(x, y) \mapsto (y-x, 0)$, é $\mathbb{Z}[(1, 1)]$. Assim do diagrama anterior obtemos a seqüência exata

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}[(1, 1)] \longrightarrow K_1(C(SS^2)) \longrightarrow 0$$

e portanto o isomorfismo

$$K_1(C(S^*S^2)) \simeq \mathbb{Z}[(1, 1)].$$

Temos ainda que o núcleo de $(\pi_{2*} - \pi_{1*})_0$ é isomorfo a $\mathbb{Z}[(1, 1)]$, ou seja, a imagem de $(p_{1*}, p_{2*})_0$ é $\mathbb{Z}[(1, 1)]$. E a partir da imagem de $(\pi_{2*} - \pi_{1*})_1$ que é $2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, podemos obter o núcleo da aplicação $\gamma : \mathbb{Z}[\mathfrak{j}] \oplus \mathbb{Z}[\mathfrak{w}] \rightarrow K_0(C(SS^2))$ que é um grupo isomorfo a $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/(2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_2[(1, 0)]$. Com isto construímos a seqüência exata

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2[(1, 0)] \longrightarrow K_0(C(SS^2)) \longrightarrow \mathbb{Z}[(1, 1)] \longrightarrow 0$$

o que consequentemente nos leva a

$$K_0(C(S^*S^2)) \simeq \mathbb{Z}[(1, 1)] \oplus \mathbb{Z}_2[(1, 0)].$$

3.2 O caráter de Chern - Connes

Como dito na introdução deste capítulo precisamos conhecer a K-Teoria da C^* -álgebra \mathcal{A} gerada pelos operadores pseudodiferencias clássicos de ordem zero da esfera e para tal vamos utilizar a seqüência exata (3.1) e os grupos $K_0(\mathcal{A}/\mathcal{K})$ e $K_1(\mathcal{A}/\mathcal{K})$ encontrados na seção anterior.

Novamente através da seqüência exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{\psi} \mathcal{A} \xrightarrow{\pi} \mathcal{A}/\mathcal{K} \longrightarrow 0 \quad ,$$

como em B.23, a partir da funtoriedade de K_0 e K_1 e da periodicidade de Bott B.22, obtemos a seqüência exata cíclica

$$\begin{array}{ccccc} K_0(\mathcal{K}) & \xrightarrow{K_0(\psi)} & K_0(\mathcal{A}) & \xrightarrow{K_0(\pi)} & K_0(\mathcal{A}/\mathcal{K}) \\ \uparrow \delta & & & & \downarrow \\ K_1(\mathcal{A}/\mathcal{K}) & \xleftarrow{K_1(\pi)} & K_1(\mathcal{A}) & \xleftarrow{K_1(\psi)} & K_1(\mathcal{K}). \end{array}$$

Pelos cálculos da seção anterior temos

$$K_0(\mathcal{A}/\mathcal{K}) \simeq K_0(C(SS^2)) \simeq \mathbb{Z}[(1, 1)] \oplus \mathbb{Z}_2[(1, 0)]$$

e

$$K_1(\mathcal{A}/\mathcal{K}) \simeq K_1(C(S^*S^2)) \simeq \mathbb{Z}[(0, 1)].$$

Como em [LM] a fórmula de Fedosov nos mostra que em toda variedade compacta, como é o nosso caso, existe um operador pseudodiferencial clássico de ordem zero com índice de Fredholm igual a 1 (um), ou seja, a aplicação do índice δ é sobrejetora, logo

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{K_0(\psi)=0} & K_0(\mathcal{A}) & \xrightarrow{K_0(\psi)} & \mathbb{Z}[(1, 1)] \oplus \mathbb{Z}_2[(1, 0)] \\ \uparrow \text{sobrej.} & & & & \downarrow \\ \mathbb{Z}[(0, 1)] & \xleftarrow{K_1(\psi)} & K_1(\mathcal{A}) & \xleftarrow{K_1(\pi)} & 0. \end{array}$$

Assim, como já feito na seção anterior, podemos decompor este diagrama em duas seqüências exatas, e são elas

$$0 \longrightarrow K_0(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{Z}[(1, 1)] \oplus \mathbb{Z}_2[(1, 0)] \longrightarrow 0$$

isto porque o núcleo de $K_0(\psi) = 0$ e

$$0 \longrightarrow K_1(\mathcal{A}) \longrightarrow 0$$

pois o homorfismo de grupos $\delta : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ é sobrejetor e conseqüentemente injetor, logo a imagem de $K_1(\psi) = 0$.

Destas duas seqüências temos

$$K_0(\mathcal{A}) = \mathbb{Z}[(1, 1)] \oplus \mathbb{Z}_2[(1, 0)] \quad \text{e} \quad K_1(\mathcal{A}) = 0.$$

Observe então que o caráter de Chern-Connes neste caso se resume ao caso par, ou seja, basta encontrarmos $Ch_\tau : K_0(\mathcal{A}) \rightarrow H_{\mathbb{R}}^{\text{par}}(SO(3))$, já que $K_1(\mathcal{A}) = 0$.

Antes de calcularmos o caráter de Chern-Connes como na Definição 1.12, cabe observar que qualquer homomorfismo $h : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ é nulo, já que

$$0 = h(2) = h(1 + 1) = 2h(1).$$

Com isto o caráter de Chern-Connes para o C^* -sistema dinâmico em questão, isto é, para $(\mathcal{A} = \overline{\Psi^0(S^2)}, SO(3), \alpha)$ é dado por

$$ch_\tau : K_0(\mathcal{A}) \oplus K_1(\mathcal{A}) = \mathbb{Z}[(1, 1)] \oplus \mathbb{Z}_2[(1, 0)] \oplus 0 \rightarrow H_{\mathbb{R}}^*(SO(3))$$

e este não se anula apenas no gerador $[(1, 1)]$ de $K_0(\mathcal{A})$ e portanto se resume a

$$Ch_\tau : K_0(\mathcal{A}) = \mathbb{Z}[(1, 1)] \rightarrow \mathbb{R},$$

com $Ch_\tau([1, 1]_0) = \tau(\mathfrak{z})$ que é igual a medida de S^2 .

Capítulo 4

A K-teoria do fibrado das coesferas do Toro

Dado o C*-sistema dinâmico $(\mathcal{A}, S^1, \alpha)$, onde \mathcal{A} é $\overline{\Psi_{cl}^0(T)}$ a C*-álgebra gerada pelos operadores pseudodiferenciais clássicos de ordem zero do Toro e a ação α é a de conjugação pela translação em S^1 , podemos repetir o raciocínio utilizado nos dois capítulos anteriores para calcular o caráter de Chern-Connes neste caso.

Note que assim como nos exemplos anteriores temos α contínua e $\Psi_{cl}^0(T)$ invariante pelo cálculo funcional holomorfo o que nos dá razão em dizer que estamos calculando o caráter de Chern-Connes para os operadores pseudodiferenciais clássicos de ordem zero do Toro.

E para calcularmos $K_0(\mathcal{A})$ e $K_1(\mathcal{A})$ neste caso, precisaríamos antes calcular a K-teoria do fibrado das coesferas do Toro e é por este motivo que apresentaremos neste capítulo o cálculo dos grupos de K-teoria do fibrado das coesferas do Toro e seus geradores.

De fato, para obter $K_0(\mathcal{A})$ e $K_1(\mathcal{A})$ seria necessário utilizar um raciocínio análogo ao feito em (2.1) e (3.1) no qual $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$ e a sequência

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\pi} \mathcal{A}/\mathcal{K} \longrightarrow 0 \quad (4.1)$$

é exata.

Novamente pelo Teorema 2 de [M2] e seu corolário, existe um isomorfismo φ

entre o quociente \mathcal{A}/\mathcal{K} e $C(S^*T) \stackrel{\psi}{\simeq} C(S^1 \times T)$.

Utilizando a seqüência (4.1) e o Teorema B.23 temos a seqüência exata cíclica de seis termos

$$\begin{array}{ccccc}
 K_0(\mathcal{K}) & \xrightarrow{K_0(\psi)} & K_0(\mathcal{A}) & \xrightarrow{K_0(\pi)} & K_0(\mathcal{A}/\mathcal{K} \simeq C(S^*T)) \\
 \uparrow \delta & & & & \downarrow \\
 K_1(\mathcal{A}/\mathcal{K} \simeq C(S^*T)) & \xleftarrow{K_1(\pi)} & K_1(\mathcal{A}) & \xleftarrow{K_1(\psi)} & K_1(\mathcal{K}).
 \end{array}$$

Assim como visto anteriormente, como T é compacto, a aplicação δ é sobrejetora e portanto $K_1(\psi) = 0$, além disso $K_1(\mathcal{K}) = 0$ o que nos permite decompor o diagrama acima em duas seqüências exatas, são elas

$$0 \rightarrow K_0(\mathcal{A}) \rightarrow K_0(C(S^*T)) \rightarrow 0$$

e

$$0 \rightarrow K_1(\mathcal{A}) \rightarrow K_1(C(S^*T)) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Através das duas seqüências exatas acima fica claro que um modo de encontrarmos $K_0(\mathcal{A})$ e $K_1(\mathcal{A})$ e seus geradores, é encontrando antes os grupos de K-teoria de $C(S^*T)$.

Vamos então calcular os grupos de K-teoria de $C(S^*T)$ e para isto pensemos em $C(T) = C(S^1 \times S^1) \simeq C(S^1, C(S^1))$, com $(z, w) \in S^1 \times S^1$, e tomemos a seguinte seqüência exata curta

$$0 \longrightarrow SC(S^1) \longrightarrow C(T) \longrightarrow C(S^1) \longrightarrow 0.$$

Como a seqüência exata acima cinde, temos

$$K_0(C(T)) = K_0(C(S^1)) \oplus K_1(C(S^1)) = [1]_0\mathbb{Z} \oplus [\theta_{C(S^1)}[\mathfrak{w}]_1]_0\mathbb{Z}$$

e

$$K_1(C(T)) = K_1(C(S^1)) \oplus K_0(C(S^1)) = [\beta_{C(S^1)}[1]_0]_1\mathbb{Z} \oplus [\mathfrak{w}]_1\mathbb{Z},$$

lembrando que \mathfrak{w} representa a função $\mathfrak{w}(z, w) = w$.

Pensando agora em $S^*T \simeq S^1 \times T = S^1 \times S^1 \times S^1$, $(\xi, z, w) \in S^*T$ e procedendo-se da mesma maneira, temos a seqüência exata cindida

$$0 \longrightarrow SC(T) \longrightarrow C(S^1, C(T)) \longrightarrow C(T) \longrightarrow 0.$$

Logo

$$\begin{aligned} K_0(C(S^*T)) &= K_0(C(T)) \oplus K_1(C(T)) \\ &= [1]_0\mathbb{Z} \oplus [\theta_{C(S^1)}[\mathfrak{w}]_1]_0\mathbb{Z} \oplus [\theta_{C(T)}[\beta_{C(S^1)}[1]_0]_1]_0\mathbb{Z} \oplus [\theta_{C(T)}[\mathfrak{w}]_1]_0\mathbb{Z} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} K_1(C(S^*T)) &= K_1(C(T)) \oplus K_0(C(T)) \\ &= [\beta_{C(S^1)}[1]_0]_1\mathbb{Z} \oplus [\mathfrak{w}]_1\mathbb{Z} \oplus [\beta_{C(T)}[1]_0]_1\mathbb{Z} \oplus [\beta_{C(T)}[\theta_{C(S^1)}[\mathfrak{w}]_1]_0]_1\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Apêndice A

Representações em álgebras de Lie

Nossa intenção neste apêndice é a de mostrar alguns resultados básicos sobre derivação e representações em álgebras de Lie que são utilizados no primeiro capítulo desta tese. Um exemplo disto é o de que dado um C^* -sistema dinâmico (A, G, α) , a definição dada em Definição 1.1 faz sentido, isto é, o de que a aplicação δ é de fato uma representação de \mathfrak{g} , álgebra de Lie do grupo G , sobre a álgebra de Lie das derivações sobre A^∞ .

Gostaríamos aqui de agradecer novamente o inestimável auxílio dado por Daniel V. Tausk que produziu grande parte do texto e das explicações aqui expostas, assim como sua colaboração em outros pontos deste trabalho.

Sejam G um grupo de Lie, A um espaço de Banach (que em nosso caso será uma C^* -álgebra) e $\alpha : G \rightarrow GL(A)$ um homomorfismo (lembrando que $GL(A)$ é o grupo dos isomorfismos lineares contínuos de A e que contém $Aut(A)$ o grupo dos $*$ -automorfismos da C^* -álgebra A).

O vetor $x \in A$ é de classe C^k ($0 \leq k \leq \infty$) se a aplicação $\alpha(x) : g \mapsto \alpha_g(x)$ é de classe C^k . E assim, como na Definição 1.1, se x é no mínimo de classe C^1 e $X \in \mathfrak{g}$ definimos

$$\delta_X(x) = \frac{d}{dt}[\alpha_{\exp(tX)}(x)]|_{t=0}.$$

A proposição a seguir é basicamente a demonstração do teorema de Gårding,

isto é, a de que a *-álgebra de Fréchet A^∞ é densa (na norma) em A , para maiores detalhes vide Teorema 1 do capítulo 5 de [A].

Proposição A.1 *Sejam $f \in C_c(G)$ e ν uma medida de Haar (invariante à esquerda) sobre G . O operador $\alpha_f : A \rightarrow A$ dado por $\alpha_f(a) = \int_G f(x)\alpha_x(a)d\nu(x)$ satisfaz as seguintes afirmações.*

1. *Se $f \in C_c^\infty(G)$, então $\alpha_f(a) \in A^\infty$, $\forall a \in A$.*
 2. *Dada uma seqüência $(f_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(G)$ tal que:*
 - (i) $\int_G f_i(x)d\nu(x) = 1$, $\forall i \in \mathbb{N}$;
 - (ii) $f_i \geq 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$ e
 - (iii) *para qualquer vizinhança U da unidade de G , temos $\text{supp } f_i \subset U$ exceto para um número finito de índices.*
- Então $\alpha_{f_i}(a)$ converge para a , para qualquer $a \in A$.*

Demonstração: (1) Seja g um elemento de G , como a medida de Haar é invariante à esquerda obtemos

$$\alpha_g \alpha_f(a) = \int_G f(x)\alpha_{gx}(a)d\nu(x) = \int_G f(g^{-1}x)\alpha_x(a)d\nu(x).$$

Assim para $X \in \mathfrak{g}$ e $g_t = \exp(tX)$, com $t \in \mathbb{R}$, temos

$$f(g_t^{-1}x) - f(x) = \int_0^1 \frac{d}{ds} f(g_{st}^{-1}x)ds = -t \int_0^1 Xf(g_{st}^{-1}x)ds,$$

vendo aqui X como o campo de vetores invariante à direita sobre G e que corresponde a transformação $x \mapsto g_t x$.

Portanto

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{g_t} - I}{t} \alpha_f(a) &= - \int_G \int_0^1 Xf(g_{st}^{-1}x)\alpha_x(a)dsd\nu(x) \\ &= - \int_G \int_0^1 Xf(x)\alpha_{g_{st}}\alpha_x(a)dsd\nu(x) \\ &= - \int_0^1 \alpha_{g_{st}} \int_G Xf(x)\alpha_x(a)d\nu(x)ds \\ &= - \int_0^1 \alpha_{g_{st}} \alpha_{Xf}(a)ds \end{aligned}$$

e

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha_{g_t} - I}{t} \alpha_f(a) = -\alpha_{Xf}(a).$$

Provamos com isto que a aplicação $\alpha(\alpha_f(a)) : G \rightarrow A$, dada por $g \mapsto \alpha_g \alpha_f(a)$ é de classe C^1 e repetindo-se este mesmo argumento podemos provar que esta é uma aplicação de classe C^∞ .

(2) Dados $\epsilon > 0$ e $a \in A$, podemos escolher uma vizinhança U da unidade de G tal que $\|\alpha_g(a) - a\| \leq \epsilon$, para $g \in U$. Como $\alpha_{f_i}(a) - a = \int_G f_i(g)(\alpha_g f - f) d\nu(g)$, então se $\text{supp } f_i \subset U$, temos $\|\alpha_{f_i}(a) - a\| \leq \epsilon$.

■

Definição A.2 Dadas \mathfrak{g}_1 e \mathfrak{g}_2 álgebras de Lie dizemos que a aplicação $\varphi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ é um homomorfismo de álgebras de Lie se φ é linear e preserva os colchetes de Lie, isto é, $\varphi([X, Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)]$, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}_1$.

Além disso, se \mathfrak{g}_2 for $GL(n, \mathbb{C})$, $GL(n, \mathbb{R})$, ou ainda $End(V)$, V espaço vetorial, o homomorfismo φ é chamado de representação.

Dadas duas variedades diferenciáveis M e N , A um espaço de Banach e uma aplicação $f : M \times N \rightarrow A$ de classe C^2 , denotaremos, para $(x_0, y_0) \in M \times N$, a diferencial da aplicação $x \mapsto f(x, y_0)$ em x_0 por

$$\partial_1 f(x_0, y_0) : T_{x_0} M \rightarrow A$$

e a diferencial da aplicação $y \mapsto f(x_0, y)$ no ponto y_0 por

$$\partial_2 f(x_0, y_0) : T_{y_0} N \rightarrow A.$$

Apenas utilizando o Teorema de Schwarz em coordenadas locais em torno de (x_0, y_0) podemos mostrar que para quaisquer $v \in T_{x_0} M$ e $w \in T_{y_0} N$ a diferencial da aplicação

$$x \mapsto \partial_2 f(x, y_0).w \in A$$

no ponto x_0 avaliada em v coincide com a diferencial da aplicação

$$y \mapsto \partial_1 f(x_0, y).v \in A$$

no ponto y_0 avaliada em w .

Lema A.3 *Se $x \in A$ é de classe C^k , então:*

1. $\forall g \in G$ o vetor $\alpha_g(x) \in A$ é de classe C^k ;
2. se $k \geq 1$ e $X \in \mathfrak{g}$, então a aplicação $\lambda_X : g \mapsto \delta_X(\alpha_g(x)) \in A$ é de classe C^{k-1} ;
3. se $k \geq 1$, então $\forall Y \in \mathfrak{g}$ o vetor $\delta_Y(x) \in A$ é de classe C^{k-1} ;
4. se $k \geq 2$ e $X, Y \in \mathfrak{g}$, então $d\lambda_X(1).Y = \delta_X\delta_Y(x)$;
5. se $k \geq 1$ e $X \in \mathfrak{g}$, então a aplicação $\tau_X : (g, h) \mapsto \alpha_g(\delta_X(\alpha_h(x))) \in A$ é de classe C^{k-1} ;
6. se $k \geq 2$ e $X, Y \in \mathfrak{g}$, então

$$\delta_1\tau_X(1, 1).Y = \delta_Y(\delta_X(x)) \quad e \quad \delta_2\tau_X(1, 1).Y = \delta_X(\delta_Y(x)).$$

Demonstração: (1) Consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} f : G \times G &\rightarrow A \\ (g, h) &\mapsto \alpha_{hg}(x) = \alpha_h\alpha_g(x) \end{aligned} ,$$

de classe C^k . Como por hipótese x é de classe C^k , então para todo $g \in G$ a aplicação $h \mapsto \alpha_h(\alpha_g(x))$ é de classe C^k , logo $\alpha_g(x)$ é de classe C^k .

(2) Para $k \geq 1$ temos $\partial_2 f(g, 1).X = d(\alpha_1(\alpha_g(x))).X = \delta_X(\alpha_g(x)) = \lambda_X(g)$, consequentemente λ_X é de classe C^{k-1} .

(3) Vale também para todo $h \in G$ e $Y \in \mathfrak{g}$ que

$$\partial_1 f(1, h).Y = d(\alpha_h(\alpha_1(x))).Y = \alpha_h(\delta_Y(x)),$$

ou seja, $\delta_Y(x)$ é de classe C^{k-1} .

(4) Se $k \geq 2$, utilizando a afirmação anterior a este lema aplicada a f no ponto $(1, 1) \in G \times G$ e nos vetores $X, Y \in \mathfrak{g}$, temos

$$\begin{aligned} d\lambda_X(1).Y &= d(\partial_2 f(1, 1).X).Y = d(\partial_1 f(1, 1).Y).X \\ &= d(\delta_Y(x)).X = d(\alpha_1(\delta_Y(x))).X = \delta_X(\delta_Y(x)). \end{aligned}$$

(5) Consideremos agora a aplicação

$$\begin{aligned} F : G \times G \times G &\rightarrow A \\ (g_1, g_2, g_3) &\mapsto \alpha_{g_1 g_3 g_2}(x) \end{aligned},$$

novamente F é de classe C^k e para $y = \alpha_{g_2}(x)$ temos

$$\partial_3 F(g_1, g_2, 1) = d(\alpha_{g_1}(\alpha_1(y))) = \alpha_{g_1}(\delta_X(y)) = \tau_X(g_1, g_2),$$

ou seja, τ é de classe C^{k-1} .

(6) E se $k \geq 2$ a derivada $\partial_1(\tau_X(1, 1))$ é calculada observando-se que a aplicação $g \mapsto \tau_X(g, 1)$ coincide com $\alpha_1(z)$, para $z = \delta_X(x)$. Assim

$$\partial_1(\tau_X(1, 1)).Y = d(\alpha_1(z)).Y = \delta_Y(\alpha_1(z)) = \delta_Y(\delta_X(x)).$$

Da mesma forma, $g \mapsto \tau_X(1, g)$ coincide com λ_X e

$$\partial_2(\tau_X(1, 1)).Y = d(\lambda_X(1)).Y = \delta_X(\delta_Y(x)).$$

■

Teorema A.4 *Se $x \in A$ é de classe C^2 , então $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$ temos*

$$\delta_{[X, Y]}(x) = \delta_X \delta_Y(x) - \delta_Y \delta_X(x).$$

Demonstração: Dados $g, h \in G$ temos $\alpha_g \alpha_h \alpha_{g^{-1}}(x) = \alpha_{i_g(h)}(x)$, onde i_g é o automorfismo interno de G , isto é, $i_g(h) = ghg^{-1}$. Da mesma forma, se $y = \alpha_{g^{-1}}(x)$, temos $\alpha_g \circ \alpha(y) = \alpha(x) \circ i_g^{-1}$. Pelo item (1) do lema anterior, y é de classe C^2 , desse modo diferenciando a igualdade anterior em $1 \in G$ de ambos os lados e avaliando em $Y \in \mathfrak{g}$ temos:

$$d(\alpha_g \alpha(y)(1)).Y = d(\alpha(x) i_g(1)).Y$$

$$\alpha_g(\delta_Y(y))(x) = \delta_{Ad_g(Y)}(x),$$

para todo $g \in G$, onde $Ad_g = d(i_g(1)) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$.

¹a aplicação $\alpha(x) : G \rightarrow A$ é aquela dada por $\alpha(x)(g) = \alpha_g(x)$.

Diferenciando-se a igualdade acima em $g = 1$ e avaliando-a em $X \in \mathfrak{g}$, lembrando que $\alpha_g(\delta_Y(\alpha_{g^{-1}}(x))) = \tau_Y(g, g^{-1})$, temos

$$d(\alpha_g(\delta_Y(\alpha_{g^{-1}}(x)))) \cdot X = d(\tau_Y(g, g^{-1})) \cdot X$$

e em $g = 1$ temos $d(\tau_Y(1, 1)) \cdot X$ que pelo lema anterior é de classe C^1 e a diferencial avaliada em X é dada por $\partial_1 \tau_Y(1, 1) \cdot X - \partial_2 \tau_Y(1, 1) \cdot X = \delta_X \delta_Y(x) - \delta_Y \delta_X(x)$.

Agora diferenciando-se o lado direito da igualdade temos $Z \mapsto \delta_Z(x) \in A$ linear e contínua, pois coincide com $d(\alpha(x)(1))$. Além disso, a diferencial da aplicação $g \mapsto Ad_g(Y) \in \mathfrak{g}$ no ponto $g = 1$ e avaliada em X é igual a $[X, Y]$, ou seja,

$$d(\delta_{Ad_1(Y)}(x)) \cdot X = \delta_{[X, Y]}(x).$$

■

Com isto provamos que a aplicação δ , como na Definição 1.1, é de fato uma representação de \mathfrak{g} na álgebra de Lie das derivações de A^∞ .

Apêndice B

Resultados sobre K-teoria de C^* -álgebras

Este apêndice dedica-se a uma breve introdução e à apresentação de alguns resultados básicos, utilizados neste trabalho, sobre a K-teoria de C^* -álgebras. Os resultados aqui apresentados são clássicos e podem ser vistos com mais detalhes em livros como [RLL], [WO] e [B], que nesta seqüência, aumentam o grau de complexidade e diminuem o de didática.

Definição B.1 *Uma C^* -álgebra A é uma $*$ -álgebra de Banach onde $\|a^*a\| = \|a\|^2$, para todo $a \in A$. Se A possui unidade, 1_A , então dizemos que A é uma C^* -álgebra com unidade.*

Alguns exemplos bastante conhecidos e utilizados de C^* -álgebras são

Exemplo B.2 *Seja \mathcal{H} um espaço de Hilbert de dimensão finita ou infinita, então $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, conjunto dos operadores limitados de \mathcal{H} , é uma C^* -álgebra quando consideradas as operações*

$$(T + S)(h) = T(h) + S(h)$$

$$(TS)(h) = T(S(h))$$

$$(\lambda T)(h) = \lambda T(h),$$

a norma usual de operadores

$$\|T\| = \sup\{\|Th\| : h \in H, \|h\| \leq 1\},$$

e a involução obtida através do produto interno,

$$\langle Th, k \rangle = \langle h, T^*k \rangle \quad \text{para } h \text{ e } k \text{ em } H.$$

Exemplo B.3 O conjunto das matrizes quadradas $n \times n$ a valores complexos, $M_n(\mathbb{C})$, também é uma C^* -álgebra, basta identificarmos este espaço com $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ e temos um caso particular do exemplo anterior.

Exemplo B.4 As subálgebras fechadas e auto-adjuntas de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, \mathcal{H} um espaço de Hilbert, como no exemplo (B.2) também são C^* -álgebras.

Exemplo B.5 Dada uma C^* -álgebra A , o conjunto das matrizes $M_n(A)$, munido das operações usuais também é uma C^* -álgebra. Pelo Teorema de Gelfand-Naimark, vide Teorema 1.1.3 de [RLL], A é isomorfa a uma C^* -subálgebra de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, para algum espaço de Hilbert \mathcal{H} . Assim $M_n(A)$ é uma C^* -subálgebra de $\mathcal{L}(\mathcal{H}^n)$.

Dada uma $*$ -álgebra A qualquer, com ou sem unidade, podemos associar a esta uma $*$ -álgebra \tilde{A} que possua uma unidade. Isso pode ser feito se construirmos \tilde{A} , chamada de unitização de A , da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= A \oplus \mathbb{C} \\ (a, z)(b, w) &= (ab + zb + wa, zw) \\ (a, z)^* &= (a^*, \bar{z}) \end{aligned}$$

e teremos como unidade de \tilde{A} o elemento $1_{\tilde{A}} = (0, 1)$. Além disso, teremos uma identificação, através de um homomorfismo injetivo, de A com um ideal maximal de \tilde{A} através dos elementos $(a, 0)$, para todo $a \in A$.

Como A pode ser identificado com uma subálgebra fechada de \tilde{A} , então \tilde{A} será uma $*$ -álgebra de Banach se A de fato for uma $*$ -álgebra de Banach. E por fim, se A é uma C^* -álgebra podemos definir em \tilde{A} uma norma que a torna uma C^* -álgebra, vide Teorema 1.15 de [D].

Dadas as $*$ -álgebras A e B podemos também estender os $*$ -homomorfismos $\phi : A \rightarrow B$ para $*$ -homomorfismos $\tilde{\phi} : \tilde{A} \rightarrow \tilde{B}$, dados por $\tilde{\phi}(x + z1_{\tilde{A}}) = \phi(x) + z1_{\tilde{B}}$.

Como pode ser visto em 1.1.6 de [RLL] a associação entre A e \tilde{A} nos permite construir a seqüência exata curta cindida, dada por

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} \tilde{A} \xrightarrow[\lambda]{\pi} \mathbb{C} \rightarrow 0 \quad (\text{B.1})$$

com π a aplicação quociente e $\lambda(z) = z1_{\tilde{A}}$. Além disso, se A possui unidade a aplicação $(a, z) \mapsto a + z(1_{\tilde{A}} - 1_A)$ é um isomorfismo entre $A \oplus \mathbb{C}$ e \tilde{A} .

Definição B.6 Sendo $\mathcal{P}(A)$ o conjunto das projeções de uma C^* -álgebra A , isto é, o conjunto dos elementos de $p \in A$ tais que $p = p^* = p^2$, definimos

$$\mathcal{P}_n(A) = \mathcal{P}(M_n(A)) \quad e \quad \mathcal{P}_\infty(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n(A).$$

Dadas as projeções p e q em $\mathcal{P}_\infty(A)$, mais precisamente $p \in \mathcal{P}_m(A)$ e $q \in \mathcal{P}_n(A)$, definimos a relação de equivalência $p \sim_0 q$ se existe $u \in M_{mn}(A)$ tal que $p = uu^*$ e $q = u^*u$.

Definimos também a operação $p \oplus q = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$ em $\mathcal{P}_\infty(A)$.

Utilizando a definição acima podemos construir o semigrupo abeliano e com unidade $(\mathcal{P}_0(A), +)$, onde

$$\mathcal{P}_0(A) = \mathcal{P}_\infty(A) / \sim_0 \quad e \quad [p]_0 + [q]_0 = [p \oplus q]_0.$$

Dado qualquer semigrupo abeliano (S, \oplus) existe uma construção bastante conhecida, chamada construção de Grothendieck, de um grupo abeliano a partir deste semigrupo. Definimos a relação que facilmente se prova ser de equivalência \sim em $S \times S$, dada por $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ se existe $z \in S$ tal que $x_1 \oplus y_2 \oplus z = x_2 \oplus y_1 \oplus z$. Dessa forma definimos o grupo de Grothendieck como sendo $G_S = S \times S / \sim$, cuja operação $+$ é dada por $[x_1, y_1] + [x_2, y_2] = [x_1 \oplus x_2, y_1 \oplus y_2]$, onde $[x, y]$ designa a classe de equivalência de $(x, y) \in S \times S$.

Não é difícil provar que $(G_S, +)$ construído acima é de fato um grupo e também que é abeliano. Além disso, para $y \in S$ existe uma aplicação, conhecida como aplicação de Grothendieck, que independe do y escolhido e que é dada por

$$\begin{aligned}\gamma_S : S &\rightarrow G_S \\ x &\mapsto [x \oplus y, y].\end{aligned}$$

Estamos prontos portanto para definir o grupo de K-teoria $K_0(A)$ de uma C^* -álgebra A com unidade.

Definição B.7 *Dada uma C^* -álgebra A com unidade, podemos definir o grupo de K-teoria $K_0(A)$ com sendo o grupo de Grothendieck obtido a partir do semigrupo abeliano e com unidade $(\mathcal{P}_0(A), +)$, onde por abuso de notação $[p]_0 = \gamma([p]_0)$, para $\gamma : \mathcal{P}_0 \rightarrow K_0(A)$ a aplicação de Grothendieck.*

Existe uma representação padrão, muito utilizada, para os elementos de $K_0(A)$. Tal representação é apresentada na proposição a seguir e sua demonstração pode ser encontrada em 3.1.7 de [RLL].

Proposição B.8 *Seja A uma C^* -álgebra com unidade, então*

$$\begin{aligned}K_0(A) &= \{[p]_0 - [q]_0 : p, q \in \mathcal{P}_\infty(A)\} \\ &= \{[p]_0 - [q]_0 : p, q \in \mathcal{P}_n(A)\}.\end{aligned}$$

A definição anterior nos permite entender K_0 como um funtor entre a categoria das C^* -álgebras com unidade e a categoria dos grupos abelianos, vide 3.2.4 de [RLL]. Além disso, poderíamos utilizar a definição acima também para C^* -álgebras *sem unidade*, mas isto impediria o funtor K_0 de ser meio-exato¹, como pode ser visto no exemplo 3.3.9 também de [RLL].

Dado um $*$ -homomorfismo de C^* -álgebras $\phi : A \rightarrow B$ utilizamos a functoriedade de K_0 para definir o homomorfismo de grupos

$$\begin{aligned}K_0(\phi) : K_0(A) &\rightarrow K_0(B) \\ [p]_0 &\mapsto [\phi(p)]_0.\end{aligned}$$

¹Um funtor F é dito meio-exato se dada uma seqüência exata curta $0 \rightarrow A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C \rightarrow 0$, temos a seqüência exata $F(A) \xrightarrow{F(\phi)} F(B) \xrightarrow{F(\psi)} F(C)$.

Já para C^* -álgebras A sem unidade definimos o grupo $K_0(A)$, como sendo o núcleo da aplicação $K_0(\pi) : K_0(\tilde{A}) \rightarrow K_0(\mathbb{C})$, dada por $K_0(\pi)([p]_0) = [\pi(p)]_0$ que pode ser melhor entendida através da seqüência exata B.1, ou resumidamente

$$K_0(A) = N(K_0(\pi)).$$

E como pode ser visto em 4.1.3, 4.3.2 e 4.3.3 de [RLL] esta definição de K_0 , para uma C^* -álgebra qualquer nos permite provar que além de funtor, K_0 também é meio-exato e exato cindido, isto é, leva seqüências exatas cindidas de C^* -álgebras em seqüências exatas cindidas de grupos abelianos.

Além disso, o funtor K_0 é contínuo com respeito a limite indutivo e é estável, isto é $K_0(\varinjlim A_n) = \varinjlim (K_0(A_n))$ e $K_0(A) \simeq K_0(A \otimes \mathcal{K})$ ².

Assim como para C^* -álgebras com unidade, existe uma representação padrão para os elementos de $K_0(A)$, com A uma C^* -álgebra qualquer.

Proposição B.9 *Sejam A uma C^* -álgebra qualquer e $s = \lambda \circ \pi : \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$, obtida através de B.1, então*

$$K_0(A) = \{[p]_0 - [s(p)]_0 : p \in \mathcal{P}_\infty(\tilde{A})\}$$

Feito isto temos a definição, o retrato e algumas propriedades básicas do grupo $K_0(A)$ e do funtor K_0 , para A uma C^* -álgebra qualquer, mas antes de darmos alguns exemplos do cálculo de alguns desses grupos definiremos o outro grupo de K-teoria de uma C^* -álgebra A , em outros termos, $K_1(A)$.

Definição B.10 *Sendo $\mathcal{U}(A)$ o grupo dos elementos unitários de uma C^* -álgebra A com unidade, isto é, o conjunto dos elementos $u \in A$ tais que $u^*u = uu^* = 1_A$, definimos*

$$\mathcal{U}_n(A) = \mathcal{U}(M_n(A)) \quad e \quad \mathcal{U}_\infty(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n(A).$$

$$\text{Definimos em } \mathcal{U}_\infty(A) \text{ a operação } u \oplus v = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}.$$

²Lembrando que \mathcal{K} é a C^* -álgebra dos operadores compactos sobre um espaço de Hilbert separável e de dimensão infinita.

É dados os unitários u e v em $\mathcal{U}_\infty(A)$, ou mais precisamente, $u \in \mathcal{U}_n(A)$ e $v \in \mathcal{U}_m(A)$ definimos a relação de equivalência $u \sim_1 v$ se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $u \oplus 1_{k-n} \sim_h v \oplus 1_{k-m}$ em $\mathcal{U}_k(A)$, onde \sim_h é a usual homotopia por caminhos.

Estamos prontos portanto para definir o grupo $K_1(A)$ para uma C^* -álgebra A qualquer.

Definição B.11 *Dada uma C^* -álgebra A qualquer definimos*

$$K_1(A) = \mathcal{U}_\infty(\tilde{A}) / \sim_1 .$$

Denotaremos por $[u]_1$ a classe de equivalência que contém o elemento $u \in \mathcal{U}_\infty(A)$ e a operação do grupo como sendo $[u]_1 + [v]_1 = [u \oplus v]_1$, para $u, v \in \mathcal{U}_\infty(A)$.

Assim como K_0 , K_1 também apresenta uma representação padrão que é dada pela proposição a seguir e que é uma consequência imediata da definição anterior.

Proposição B.12 *Dada uma C^* -álgebra A , então*

$$K_1(A) = \{[u]_1 : u \in \mathcal{U}_\infty(\tilde{A})\},$$

com $[u]_1 + [v]_1 = [u \oplus v]_1$ e $[1]_1 = 0$.

Vale ressaltar, vide 8.1.6 de [RLL], que dada uma C^* -álgebra A com unidade temos $K_1(A) \simeq \mathcal{U}_\infty(A) / \sim_1$.

Além disso, K_1 também é um funtor da categoria das C^* -álgebras na categoria dos grupos abelianos, vide 8.2 de [RLL], também é meio exato, exato cindido, contínuo para limite indutivo e estável e as demonstrações destes fatos podem se encontradas em 8.2.4, 8.2.5, 8.2.7 e 8.2.8 de [RLL], respectivamente.

A functoriedade de K_0 e K_1 , nos permite provar uma série de resultados comumente utilizados, como por exemplo.

Proposição B.13 *Dadas as C^* -álgebras A e B , temos*

$$K_i(A \oplus B) \simeq K_i(A) \oplus K_i(B) \quad i = 0 \text{ ou } 1.$$

Estamos prontos agora para darmos alguns exemplos dos grupos $K_0(A)$ e $K_1(A)$, para algumas C^* -álgebras que serão utilizadas neste trabalho.

Exemplo B.14 *Para a C^* -álgebra $A = M_n(\mathbb{C})$, particularmente $\mathbb{C} = M_1(\mathbb{C})$, temos*

$$K_0(A) = \mathbb{Z} \quad e \quad K_1(A) = 0.$$

Temos $K_1(A) = 0$ pois A é conexo e para Tr o traço usual das matrizes temos o isomorfismo $K_0(Tr)$ entre $K_0(A)$ e \mathbb{Z} , como pode ser visto em 8.1.8 e 3.3.2 de [RLL] respectivamente.

Cabe ressaltar que dado um traço $\tau : A \rightarrow \mathbb{C}$ de uma C^* -álgebra A qualquer, temos $\tau(p) = \tau(q)$, se $p \sim_0 q$. Assim $K_0(\tau)([p]_0) = \tau(p)$, para $p \in \mathcal{P}_\infty(A)$.

Além disso, se τ é um traço positivo, isto é, $\tau(a) \geq 0$, para todo elemento positivo de $a \in A$, então $K_0(\tau)([p]_0) = \tau(p) \geq 0$, ou seja, $K_0(\tau) : K_0(A) \rightarrow \mathbb{R}$.

Da estabilidade dos funtores K_0 e K_1 e do exemplo anterior, temos

Exemplo B.15 *Para $A = \mathcal{K}$, álgebra dos operadores compactos de um espaço de Hilbert separável, temos*

$$K_0(A) = \mathbb{Z} \quad e \quad K_1(A) = 0.$$

Exemplo B.16 *Seja $A = \mathcal{L}(\mathcal{H})$ a C^* -álgebra definida em B.2, para \mathcal{H} separável ou não, temos*

$$K_0(A) = 0 \quad e \quad K_1(A) = 0.$$

Exemplo B.17 *Seja $A = C(X)$, a C^* -álgebra das funções contínuas de um espaço contrátil X , temos*

$$K_0(A) = \mathbb{Z} \quad e \quad K_1(A) = 0.$$

A demonstração do exemplo anterior pode ser vista em 3.3.6 e 8.2 de [RLL] e como caso particular deste temos alguns exemplos bastante utilizado neste trabalho, como

Exemplo B.18

$$K_0(C(D)) = K_0(C(\{pto\})) = K_0(C([0, 1])) = \mathbb{Z}$$

e

$$K_1(C(D)) = K_1(C(\{pto\})) = K_1(C([0, 1])) = 0$$

onde D é o disco unitário, isto é, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ e o gerador de \mathbb{Z} é $[1]_0$, onde 1 é a unidade de $C(X)$.

Definição B.19 Dada uma seqüência exata curta de C^* -álgebras

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C \rightarrow 0$$

existe $*$ -homomorfismo natural $\delta_1 : K_1(C) \rightarrow K_0(A)$, chamado de aplicação do índice que torna a seqüência

$$K_1(A) \xrightarrow{K_1(\phi)} K_1(B) \xrightarrow{K_1(\psi)} K_1(C) \xrightarrow{\delta_1} K_0(A) \xrightarrow{K_0(\phi)} K_0(B) \xrightarrow{K_0(\psi)} K_0(C)$$

exata. Além disso, existe uma representação padrão para tal aplicação dada por

$$\delta_1([u]_1) = [p] - [p_n]$$

onde $u \in \mathcal{U}_n(\tilde{C})$, $v \in \mathcal{U}_{2n}(\tilde{B})$, $p \in \mathcal{P}_{2n}(\tilde{A})$ e $p_n = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ satisfazem

$$\tilde{\phi}(p) = vp_nv^* \quad e \quad \tilde{\psi}(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}.$$

Uma prova do resultado enunciado na definição anterior pode ser encontrada em 9.1.4 de [RLL]. Além disso, o nome aplicação do índice se deve ao caso particular do índice de Fredholm, isto é, quando a seqüência exata da definição anterior é dada por

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \hookrightarrow A \rightarrow A/\mathcal{K} \rightarrow 0$$

temos $\delta_1 : K_1(A/\mathcal{K}) \rightarrow K_0(\mathcal{K})$ como sendo o índice de Fredholm, vide capítulo 14 de [WO].

Definição B.20 Dada uma C^* -álgebra A qualquer chamamos de suspensão de A o conjunto simbolizado por SA e dado por

$$\begin{aligned} SA &= \{f \in C([0, 1], A) : f(0) = f(1) = 0\} \\ &= \{f \in C(S^1, A) : f(1) = 0\} = C_0([0, 1[, A), \end{aligned}$$

e de cone de A o conjunto denotado por CA e dado por

$$CA = \{f \in C([0, 1], A) : f(0) = 0\}.$$

Através destas definições temos a seqüência exata curta

$$0 \rightarrow SA \xrightarrow{i} CA \xrightarrow{\pi} A \rightarrow 0 \quad (\text{B.2})$$

para $\pi(f) = f(1)$. E como CA é homotopicamente equivalente a zero, temos $K_0(CA) = K_1(CA) = 0$ e assim a aplicação do índice definida anteriormente se torna um isomorfismo, como enunciamos a seguir.

Corolário B.21 Dada uma C^* -álgebra A qualquer a aplicação θ_A que é a aplicação δ_1 , dada em B.19, da seqüências exata curta B.2

$$\theta_A = \delta_1 : K_1(A) \rightarrow K_0(SA)$$

é um isomorfismo de grupos.

Um dos alicerces da K-teoria é a periodicidade de Bott e para entender este isomorfismo precisamos de alguns resultados e definições preliminares.

Dada uma projeção $p \in \mathcal{P}_n(A)$, onde A é uma C^* -álgebra com unidade, definimos $f_p \in C(S^1, \mathcal{U}_n(A))$ dado por $f_p(z) = zp + (p_n - p)$. Sabendo que neste caso a unitização de SA , isto é, $\widetilde{SA} = \{(f, z) : f \in SA \text{ e } z \in \mathbb{C}\}$ pode ser identificado com o conjunto das aplicações $f \in C(S^1, A)$ tais que $f(1) \in \mathbb{C}1_A$, obtemos $f_p \in \mathcal{U}_n(\widetilde{SA})$.

E assim definimos a aplicação de Bott para C^* -álgebras com unidade

$$\begin{aligned} \beta_A : K_0(A) &\rightarrow K_1(SA) \\ [p]_0 &\rightarrow [f_p]_1. \end{aligned}$$

Para C^* -álgebras sem unidade os resultados são análogos, porém como o retrato de $K_0(A)$ é um pouco diferente do anterior teremos a aplicação de Bott dada por

$$\begin{aligned}\beta_A : K_0(A) &\rightarrow K_1(SA) \\ [p]_0 - [s(p)]_0 &\rightarrow [f_p f_{s(p)}^*]_1.\end{aligned}$$

Enunciaremos a seguir este teorema, cuja demonstração pode ser encontrada nas seções 9.1 e 9.2 de [WO], que prova que a aplicação de Bott definida acima é de fato um isomorfismo.

Teorema B.22 (Periodicidade de Bott) *A aplicação $\beta_A : K_0(A) \rightarrow K_1(SA)$ é um isomorfismo de grupos.*

Utilizando estes dois últimos resultados obtemos uma das principais ferramentas da K-teoria que é a sequência exata cíclica de seis termos. Vejamos

Teorema B.23 *Dada a sequência exata curta de C^* -álgebras*

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C \rightarrow 0$$

podemos construir a aplicação exponencial $\delta_0 : K_0(C) \rightarrow K_1(A)$ que é dada pela composição das aplicações

$$K_0(C) \xrightarrow{\beta_C} K_1(SC) \simeq K_2(C) \xrightarrow{\delta_2} K_1(A).$$

Disto e de B.19 decorre a sequência exata cíclica

$$\begin{array}{ccccc} K_0(A) & \xrightarrow{K_0(\phi)} & K_0(B) & \xrightarrow{K_0(\psi)} & K_0(C) \\ \uparrow \delta_1 & & & & \downarrow \delta_0 \\ K_1(C) & \xleftarrow{K_1(\psi)} & K_1(B) & \xleftarrow{K_1(\phi)} & K_1(A) \end{array}$$

De posse destas ferramentas e resultados podemos provar muitas outras propriedades importantes, como também exemplos bastante utilizados na literatura da área e neste trabalho.

Exemplo B.24 Para a C^* -álgebra $C(S^1)$, temos

$$K_0(C(S^1)) \simeq [\mathbf{1}]_0 \mathbb{Z} \quad e \quad K_1(C(S^1)) \simeq [\mathfrak{z}]_1 \mathbb{Z}.$$

Onde $\mathbf{1}$ simboliza a projeção $\mathbf{1}(e^{i\theta}) = 1$ e \mathfrak{z} o unitário $\mathfrak{z}(e^{i\theta}) = e^{i\theta}$.

Dado um espaço compacto Hausdorff X e portanto a C^* -álgebra $C(S^1 \times X)$ sabemos que $C(S^1 \times X) \simeq C(S^1) \otimes C(X) \simeq C(S^1, C(X))$ e assim podemos construir a seqüência exata

$$0 \rightarrow SC(X) \rightarrow C(S^1, C(X)) \rightarrow C(X) \rightarrow 0$$

que cinde. Como K_0 e K_1 são funtores que preservam seqüências exatas cindidas, temos

$$0 \rightarrow K_i(SC(X)) \rightarrow K_i(C(S^1, C(X))) \rightarrow K_i(C(X)) \rightarrow 0$$

e portanto

Proposição B.25 Nas condições anteriores temos para $i = 0$ ou 1

$$K_i(C(S^1, X)) \simeq K_i(X) \oplus K_{1-i}(X).$$

Além deste, alguns outros resultados sobre K-teoria são utilizados neste trabalho, mas estes, por aparecerem num contexto diferente do apresentado até agora, são enunciados e detalhados apenas quando utilizados o que pode não ser o mais didático, mas talvez seja o mais simples e prático.

Referências Bibliográficas

- [A] D. Akhiezer, "Lie Group Actions in Complex Analysis", Aspects of Mathematics E27, Ed. Vieweg, Bonn, 1995.
- [B] B. Blackadar, "K-theory for Operator Algebras", Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [C1] A. Connes, "C* algèbres et géométrie différentielle", C. R. Acad. Sci. Sc. Paris 290, 599-604, 1980.
- [C2] A. Connes, "An analogue of the Thom isomorphism for Crossed Products of a C*-algebra by an action of \mathbb{R} ", Adv. in Mathematics 39, 31-55, 1981.
- [C3] A. Connes, "Non-commutative differential geometry", Publ. Math. IHES 62, 257-360, 1985.
- [Co] H. O. Cordes, "Spectral Theory of Linear Differential Operators and Comparison Algebra", London Mathematical Society LNS 76, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [CM] H. O. Cordes & S. T. Melo, "Smooth operators for the action of $SO(3)$ on $L^2(S^2)$ ", Integral Equ. Op. Theory 28, 251-260, 1997.
- [D] D. P. Dias, "O produto cruzado de C*-álgebras por grupos mediáveis", dissertação, IME-USP, São Paulo, 2001.
- [F] B. V. Fedosov, "Index of an Elliptic System on a Manifold", Functional Analysis and its Applications, New York, 312-320, 1971.

- [G] E. Getzler, "The odd Chern Character in Cyclic Homology and Spectral Flow", *Topology* 32, 489-507, 1993.
- [Go] I. C. Gohberg, "On the theory of multidimensional singular integral operators", *Dokl. Akad. Nauk SSR* 133, 1279-1282, 1960.
- [H1] A. Hatcher, "Algebraic Topology", Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [H2] A. Hatcher, "Vector Bundles and K-Theory", Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [J] N. Jacobson, "Basic Algebra II", W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1980.
- [K] M. Karoubi, "Homologie cyclique et K-théorie", *Astérisque* 149, 1987.
- [KN] J. J. Kohn & L. Nirenberg, "An algebra of pseudo-differential operators", *Comm. Pure Appl. Math.* 18, 269-305, 1965.
- [LM] R. Lauter & S. Moroianu, "Fredholm theory for degenerate pseudodifferential operators on manifolds with fibered boundaries", *Comm. Part. Diff. Equ.* 26, 233-283, 2001.
- [L] J. L. Loday, "Cyclic Homology", Springer-Verlag, New York, 1998.
- [Ma] J. Madore, "An Introduction to Noncommutative Geometry and its Physical Applications", L.N.S. 257, London Mathematical Society, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [M1] S. T. Melo, "Characterizations of pseudodifferential operators on the circle", *Proceedings of American Mathematical Society* 125-5, 1407-1421, 1997.
- [M2] S. T. Melo, "Norm closure of classical pseudodifferential operators does not contain Hörmander's class", *Contemporary Mathematics* 398, 329-335, 2005.
- [MNS] S. T. Melo, R. Nest & E. Schrohe, "C*-structure and K-theory of Boutet de Monvel's algebra", *J. reine angew. Math.* 561, 145-175, 2003.

- [MS] S. T. Melo & C. C. Silva, "K-theory of pseudodifferential operators with semi-periodic symbols", *K-Theory* 37-3, 235-248, 2006.
- [MS1] R. Matthes & W. Szymanski, "Lecture Notes on the K-theory of Operator Algebras", *www.impan.gov.pl/Manuals/K_theory.pdf* , 2007.
- [R] X.S. Raymond, "Elementary introduction to the Theory os Pseudodifferential Operators", CRC Press, Boca Raton, 1991.
- [RLL] M. Rordam, F. Larsen & N. Laustsen, "An Introduction to K-Theory for C^* -algebras", Cambridge University Press, London, 2000.
- [Ro] F. Rochon , "Sur la topologie de l'espace des opérateurs pseudodifférentiels inversibles d'odres 0", *arxiv:math/0610576v3*, 2007.
- [S] R. T. Seeley, "Integro-differential operators on vector bundles", *Trans. Amer. Math. soc.* 117, 167-204, 1965.
- [T1] M. E. Taylor, "Pseudodifferential operators", Princeton University Press, Princeton, 1981.
- [T2] M. E. Taylor, "Beals-Cordes-Type characterizations of pseudodifferential operators", *Proc. Amer. Math. Soc.* 125, 1711-1716, 1997.
- [W] L. Waelbroeck, "Topological vector spaces and algebras", *Springer Lect. Notes Math.* 230, Berlim-New York, 1993.
- [Wa] C. Wahl, "Homological index formulas for elliptic operators over C^* -algebras", *arXiv:math/0603694* , 2006.
- [War] F. W. Warner, "Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups", Spring Verlag, New York, 1983.
- [WO] N. E. Wegge-Olsen, "K-theory and C^* -álgebras: a friendly approach", Oxford University Press, Oxford, 1993.